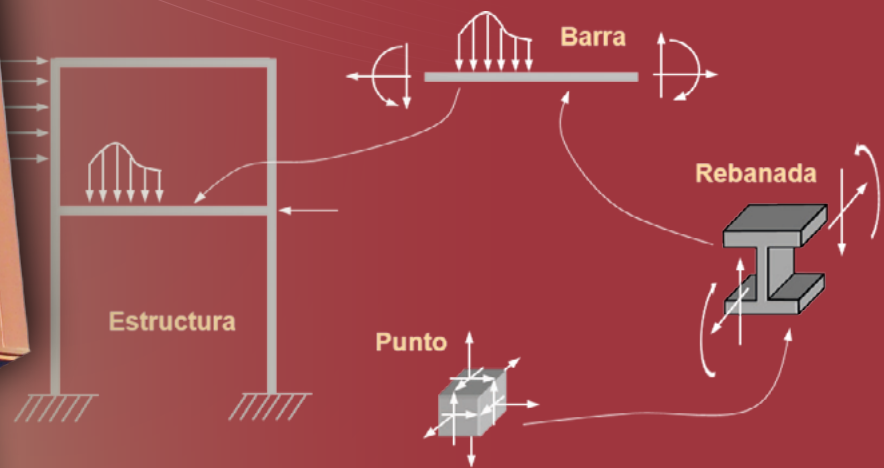


José Cañas, Enrique Graciani,  
Elena Correa, Alberto Barroso,  
Jesús Justo

# ELASTICIDAD Y RESISTENCIA DE MATERIALES

Del punto a la estructura



Editorial Universidad de Sevilla

Escuela Técnica Superior de Ingeniería



ELASTICIDAD Y RESISTENCIA DE MATERIALES.  
DEL PUNTO A LA ESTRUCTURA

**COLECCIÓN MONOGRAFÍAS DE LA ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA**

**DIRECTOR DE LA COLECCIÓN**

Sáez Pérez, Andrés. Universidad de Sevilla

**CONSEJO DE REDACCIÓN**

Arahal Junco, Consuelo. Universidad de Sevilla  
Limón Marruedo, Daniel. Universidad de Sevilla  
Estepa Alonso, Antonio. Universidad de Sevilla  
Rodríguez Luis, Alejandro José. Universidad de Sevilla  
Sáez Pérez, Andrés. Universidad de Sevilla  
Salas Gómez, Francisco. Universidad de Sevilla

**COMITÉ CIENTÍFICO**

Aracil Santonja, Javier. Universidad de Sevilla y Universidad de Málaga  
Bernelli Zazzera, Franco. Politecnico di Milano  
Chinesta, Francisco. École Centrale de Nantes  
Félez Mindan, Jesús. Universidad Politécnica de Madrid  
Gallego Sevilla, Rafael. Universidad Politécnica de Madrid  
García-Lomas Jung, Francisco Javier. Universidad de Sevilla  
Giner Maravilla, Eugenio. Universidad Politécnica de Valencia  
González Díez, Isabel. Universidad de Sevilla  
Montañés García, José Luis. Universidad Politécnica de Madrid  
Montes Martos, Juan Manuel. Universidad de Sevilla  
Navarro Esteve, Pablo José. Universidad Politécnica de Valencia  
Ollero de Castro, Pedro. Universidad de Sevilla  
Verdú, Sergio. Princeton University

José Cañas Delgado, Enrique Graciani Díaz, Elena Correa Montoto,  
Alberto Barroso Caro y Jesús Justo Estebanz

# ELASTICIDAD Y RESISTENCIA DE MATERIALES. DEL PUNTO A LA ESTRUCTURA

 EDITORIAL  
UNIVERSIDAD DE SEVILLA

 Escuela Técnica Superior de  
**INGENIERÍA DE SEVILLA**

SEVILLA 2024

Colección: Monografías de la Escuela Técnica Superior de Ingeniería  
de la Universidad de Sevilla

Núm.: 28

Comité editorial de  
la Editorial Universidad de Sevilla:

Araceli López Serena  
(Directora)

Elena Leal Abad  
(Subdirectora)

Concepción Barrero Rodríguez  
Rafael Fernández Chacón  
María Gracia García Martín  
María del Pópulo Pablo-Romero Gil-Delgado  
Manuel Padilla Cruz  
Marta Palenque  
María Eugenia Petit-Breuilh Sepúlveda  
Marina Ramos Serrano  
José-Leonardo Ruiz Sánchez  
Antonio Tejedor Cabrera

Reservados todos los derechos. Ni la totalidad ni parte de este libro puede reproducirse o transmitirse por ningún procedimiento electrónico o mecánico, incluyendo fotocopia, grabación magnética o cualquier almacenamiento de información y sistema de recuperación, sin permiso escrito de la Editorial Universidad de Sevilla.

Motivo de cubierta: ilustra de manera esquemática cómo se genera un modelo para calcular estructuras de barras (del punto a la estructura).

© Editorial Universidad de Sevilla 2024  
C/ Porvenir, 27 - 41013 Sevilla.  
Tfnos.: 954 487 447; 954 487 451  
Correo electrónico: info-eus@us.es  
Web: <https://editorial.us.es>

© José Cañas Delgado, Enrique Graciani Díaz, Elena Correa Montoto,  
Alberto Barroso Caro y Jesús Justo Estebaranz 2024

ISBN 978-84-472-2638-2  
DOI: <https://dx.doi.org/10.12795/9788447226382>

Diseño de cubierta: Santi García Hernández  
Maquetación: José Cañas Delgado  
Edición digital: Dosgraphic, S.L.

*A nuestros maestros y compañeros  
Rafael Picón y Federico París,  
por todo lo que aprendimos de ellos.*





# Prólogo

---

*Se hace ciencia con hechos como una casa con piedras,  
pero una acumulación de hechos no es una ciencia  
lo mismo que un montón de piedras no es una casa.*

Poincaré, J.

Querido lector, el texto que tiene en su mano es fruto de la evolución de los apuntes, textos y notas que los profesores París y Picón de la Universidad de Sevilla inicialmente elaboraron para apoyo a la docencia de la Elasticidad y Resistencia de Materiales en la titulación de Ingeniería Industrial que se impartía en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de la Universidad de Sevilla.

La disciplina antes aludida forma parte de lo que podríamos llamar conocimientos básicos para la ingeniería. De hecho, casi la totalidad de las carreras de ingeniería tienen como materias obligatorias la Elasticidad y la Resistencia de Materiales. Los continuos cambios de planes de estudios y el aumento de titulaciones de ingeniería que acontecen a partir del año 1998 hacen que la docencia que se imparte asociada a dichas disciplinas se vea alterada por la disminución de carga docente y la formación previa de los alumnos que la cursan. Ello ha motivado que el enfoque y el contenido de la información facilitada al alumno evolucione dando lugar al texto que aquí se presenta.

Para entender mejor el tratamiento que se le da a la Elasticidad y la Resistencia de Materiales en este texto, que se corresponde con la docencia que se imparte de esta asignatura en el actual Grado de Ingeniería en Tecnologías Industriales, los autores creen que es importante mostrar el contexto académico, que en los últimos años ha condicionado la evolución de la docencia de esta asignatura en la Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Sevilla.

Así, en la antigua titulación de Ingeniería Industrial, del Plan 64, la asignatura Elasticidad y Resistencia de Materiales era una asignatura obligatoria para todas las especialidades teniendo una carga docente asignada de 12 créditos (120 horas de docencia teórico-práctica). Posteriormente la entrada del Plan 98 originó un desdoble de la asignatura. Por un lado, se impartía la asignatura de Elasticidad en 6 créditos, y por otro, la de Resistencia de Materiales de 4.5 créditos, impartándose antes la parte de Elasticidad que la de Resistencia de Materiales. En el año 2011 se implantan los Grados, impartándose en la Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Sevilla el Grado de Ingeniería en Tecnologías Industriales, el grado afín a la antigua carrera de Ingeniería Industrial. Se multiplican las especialidades y la asignatura de Elasticidad y Resistencia de Materiales pasa a impartirse en el 1<sup>er</sup> cuatrimestre del 2<sup>o</sup> Curso con una carga docente de 6 créditos como asignatura troncal. Adicionalmente, hay otra asignatura, Ampliación de Elasticidad y Resistencia de Materiales, que es una asignatura optativa que se imparte en cursos posteriores con una carga de 4.5 créditos.

Centrándonos en la asignatura troncal, nos encontramos con el hecho de que la carga docente ha bajado significativamente, lo que afecta de forma directa al contenido de la asignatura y además la formación previa del alumno que la cursa es más baja.

Aunque el nombre de la asignatura Elasticidad y Resistencia de Materiales nos puede hacer pensar en una única disciplina, la verdad es que son dos disciplinas distintas dentro de la Mecánica de Medios Continuos que, si bien tienen los mismos objetivos y emplean las mismas ecuaciones conceptuales, se diferencian en la geometría del sólido bajo estudio. La Teoría de la Elasticidad estudia sólidos con geometría arbitraria y todas las variables involucradas en el estudio deformable del sólido se establecen a nivel de punto, resultando unas ecuaciones cuya resolución analítica, en general, no es posible. Particularidades geométricas de los sólidos (como la presencia de alguna dimensión muy superior o muy inferior a las otras) permiten establecer determinadas hipótesis simplificadoras que hacen que las ecuaciones de gobierno puedan ser tratadas analíticamente. De este aspecto se ha ocupado tradicionalmente la Resistencia de Materiales, en particular, de aquellos sólidos que tienen una dimensión muy superior a las otras dos, sólidos a los que denominamos barras.

El estudio de las barras puede llevarse a cabo sin necesidad de haber estudiado previamente la Teoría de la Elasticidad, y hay libros muy conocidos (Resistencia de Materiales de Timoshenko S. por ejemplo) que usan este enfoque. Con el bagaje de más de 40 años de impartición de la asignatura de Elasticidad y Resistencia de Materiales, creemos que es más clarificador y facilita la comprensión, el abordar la Resistencia de Materiales conociendo previamente conceptos básicos de la Teoría de la Elasticidad, tales como las tensiones, las deformaciones, la ley de comportamiento, el Principio de Saint-Venant, etc.

Así, tradicionalmente, cuando la carga docente lo permitía, o cuando el plan de estudios contemplaba dos asignaturas diferenciadas, se impartía en primer lugar la Teoría de la Elasticidad y posteriormente la Resistencia de Materiales. Para la Teoría de la Elasticidad, el texto de referencia seguido, no solo para la titulación asociada a la Ingeniería Industrial sino para otras titulaciones como Ingeniería Aeroespacial o Civil, es el riguroso texto “Teoría de la Elasticidad” del Profesor París. Para la Resistencia de Materiales, se usaban unos apuntes elaborados por el Profesor Picón, también muy extensos y detallados, que contemplan todos los aspectos relacionados con los modelos de barra.

Dada la merma que supuso en la carga docente el actual plan de estudios, se presentó la disyuntiva de cómo organizar la docencia. No parecía lógico usar los 6 créditos solo para la Teoría de la Elasticidad, pero si se usaban solo para Resistencia de Materiales el planteamiento para abordar el análisis de sólidos con geometría de barra llevado hasta ahora no resultaba posible.

La solución que se adoptó fue empezar con una introducción a la Teoría de la Elasticidad con el único propósito de introducir una serie de conceptos y ecuaciones que permitiesen, a nuestro entender, comprender mejor el modelo de barras que estudiamos en lo que denominamos Resistencia de Materiales.

Así, este texto aborda el modelo de barra partiendo del nivel de punto y llegando a la estructura (conjunto de barras) a través de la rebanada (trozo de barra) y de la barra propiamente dicha, constituyendo el texto base sobre el que se sustenta la docencia en la Titulación de Grado de Ingeniería en Tecnologías Industriales y sin duda puede servir también para otras titulaciones afines.

Aunque el título del texto no es convencional (al no existir muchos textos que se titulen de esta manera conjunta) hemos preferido que dicho título se identifique con la asignatura a la que pretende dar cobertura por lo que lo hemos denominado Elasticidad y Resistencia de Materiales, añadiéndole además “del punto a la estructura” con objeto de enfatizar como se va a plantear y desarrollar el modelo de barras.

El texto está dividido en 8 Capítulos y 5 Apéndices, y cada Capítulo dispone al final de una serie de problemas o ejercicios resueltos, algunos de estos ejercicios son ejemplo de los que se han propuesto en diferentes exámenes a lo largo de los años.

El Capítulo 1 es un tema de introducción a la mecánica del sólido deformable, donde se define el sólido en estudio, las acciones que sobre él actúan, las hipótesis que se asumen, así como las magnitudes que se emplean para caracterizar el sólido deformable y las relaciones entre ellas. En este Capítulo también se comentan los estados límites que condicionan el diseño del sólido y de especial importancia el Principio de Saint-Venant como llave para conectar el nivel de punto con el de barra.

El resto de Capítulos están dedicados al modelo de barras, considerando ésta como barra recta o de pequeña curvatura. En los Capítulos 2, 3 y 4 se estudia el nivel de rebanada y se definen la barra y las acciones sobre ella. Por integración de las magnitudes a nivel de punto se definen los esfuerzos internos y se establecen las ecuaciones de equilibrio. Las ecuaciones de compatibilidad y comportamiento, así como el cálculo de tensiones a partir de los esfuerzos internos para el caso de tracción-flexión, se tratan en el Capítulo 3 para secciones arbitrarias, y en el Capítulo 4 para perfiles de pared delgada.

La integración de las ecuaciones anteriores da lugar a las ecuaciones a nivel de barra y es tratado en el Capítulo 5. Así, para casos planos se obtienen las leyes de esfuerzos y el campo de desplazamientos. Aunque hay muchos procedimientos o técnicas para el cálculo de desplazamientos, se han empleado aquí los teoremas de Mohr, que no son más que la integración de las ecuaciones de compatibilidad-comportamiento. Los diferentes tipos de apoyos y su materialización física son también objeto de estudio en este Capítulo.

El Capítulo 6 cierra el modelo de barras de la Resistencia de Materiales y en él fundamentalmente se establece el procedimiento para abordar de forma manual el análisis de un conjunto de barras. Dicho procedimiento es conocido como el Método de las Fuerzas. También son objeto de tratamiento en este Capítulo conceptos tales como isostaticidad e hiperestaticidad.

El Capítulo 7 está dedicado al estudio de la inestabilidad de las barras sometidas a compresión. En este tema se relaja la hipótesis de pequeños desplazamientos (Teoría de 1<sup>er</sup> orden) y se

considera el equilibrio sobre la deformada (Teoría de 2º orden) para explicar por qué una barra recta sometida solo a compresión puede flectar.

El estudio de la barra a torsión es tratado en el Capítulo 8 considerando exclusivamente la situación en la que no existen restricciones a los desplazamientos de alabeo.

Por último, el texto se completa con 5 Apéndices. El primero de ellos sólo pretende recordar al lector cómo proceder para obtener propiedades geométricas de las secciones (posición del centro de gravedad, o el cálculo de los momentos estáticos de 1º y 2º orden). Se incluyen en este Apéndice las propiedades de secciones típicas, así como las de los perfiles de pared delgada comerciales.

El Apéndice 2 pretende mostrar al lector el alcance y validez de las hipótesis que el modelo de barra emplea para los problemas de tracción-flexión.

El Apéndice 3 es una reflexión, más profunda que la abordada en el Capítulo 7, sobre el fenómeno de la inestabilidad y que intenta explicar la razón por la que una barra sometida a una carga por encima de la carga crítica presenta un equilibrio inestable. Para este estudio se relaja la hipótesis de rotaciones pequeñas y se estudia el efecto de una perturbación sobre una barra comprimida en teoría de 3º orden.

En el Apéndice 4 se relaja la hipótesis del comportamiento elástico y se permite que el punto de la sección plastifique. Se introduce el concepto de colapso estructural y se emplea el modelo de rótula plástica para su determinación. Una serie de ejercicios al final de este Apéndice ilustran cómo obtener las propiedades plásticas de las secciones, así como la obtención de la carga de colapso.

Por último, el Apéndice 5 incluye una serie de ejercicios (no de exámenes) que intentan poner de manifiesto la potencia de los modelos de barra desarrollados, así como el alcance de algunas de las hipótesis establecidas.

Los autores quieren expresar su más profundo agradecimiento a los Profesores Federico París y Rafael Picón (DEP) por todo lo que nos enseñaron, por el rigor y la profundidad con que debían ser tratados los conocimientos que nos transmitieron.

También desean agradecer al resto de compañeros del Grupo de Elasticidad y Resistencia de Materiales del Departamento de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras, que han impartido esta disciplina en alguna titulación de Ingeniería y que sin duda con sus comentarios han contribuido a mejorar el contenido de este texto: Antonio Blázquez por sus fructíferos comentarios en relación al Apéndice 3, Juan Carlos Marín, Luis Távara, María Luisa Velasco, Carlos Sandino, Serafín Sánchez, Rocío Ocaña, Vladislav Mantič, Israel García y José Reinoso.

*Los autores*

*Sevilla, 2024*

# Índice

Prólogo.....	ix
Índice .....	xiii
<b>1 Conceptos básicos del sólido deformable.....</b>	<b>1</b>
1.1 <i>Introducción</i> .....	2
1.2 <i>Tensiones</i> .....	4
1.2.1 Lema de Cauchy .....	5
1.2.2 Componentes del vector tensión .....	9
1.2.3 Ecuaciones de equilibrio interno .....	10
1.2.4 Transformación de coordenadas.....	14
1.2.5 Tensiones y direcciones principales.....	15
1.3 <i>Deformaciones</i> .....	18
1.3.1 Significado geométrico de las componentes del tensor de deformaciones .....	21
1.3.2 Obtención del campo de desplazamientos .....	23
1.3.3 Vector deformación. Componentes intrínsecas.....	25
1.4 <i>Relación tensión-deformación</i> .....	26
1.4.1 El ensayo de tracción .....	26
1.4.2 Ley de comportamiento para materiales isotrópicos.....	33
1.4.3 Efecto de la temperatura sobre la ley de comportamiento.....	35
1.5 <i>Condiciones de contorno</i> .....	36
1.6 <i>Problema elástico</i> .....	38
1.7 <i>Principio de Saint-Venant</i> .....	40
1.8 <i>Estados límite</i> .....	41
1.9 <i>Ejercicios resueltos</i> .....	43
1.9.1 Cálculo de tensiones principales .....	43
1.9.2 Alargamiento de un segmento.....	44
1.9.3 Acciones sobre el contorno .....	45
1.9.4 Caso 3D, cálculo de tensiones principales y vector tensión .....	47
1.9.5 Cálculo de los desplazamientos a partir de las deformaciones .....	50
1.9.6 Lectura de bandas extensométricas.....	51
1.9.7 Problema termoelástico.....	52
1.9.8 Barra sometida a cargas en los extremos.....	56
<b>2 Conceptos básicos para el análisis de estructuras de barras .....</b>	<b>63</b>
2.1 <i>Planteamiento general del modelo de barras</i> .....	65
2.2 <i>Definición de barra</i> .....	68
2.3 <i>Fuerzas en la barra</i> .....	69
2.4 <i>Definición de los esfuerzos internos</i> .....	71
2.5 <i>Ecuaciones de equilibrio</i> .....	73

2.6	<i>Ejercicios resueltos</i> .....	76
2.6.1	Ejercicio 1.....	76
2.6.2	Ejercicio 2.....	77
2.6.3	Ejercicio 3.....	78
2.6.4	Ejercicio 4.....	79
<b>3</b>	<b>Tracción y Flexión en secciones llenas</b> .....	<b>81</b>
3.1	<i>Hipótesis simplificativas</i> .....	82
3.1.1	Hipótesis cinemáticas. Ecuaciones de compatibilidad .....	82
3.1.2	Hipótesis sobre el estado tensional .....	85
3.2	<i>Ecuaciones de comportamiento</i> .....	87
3.3	<i>Significado geométrico de las deformaciones 1D</i> .....	89
3.4	<i>Cálculo de las tensiones normales y tangenciales</i> .....	91
3.5	<i>Nuevo cálculo de las tensiones tangenciales</i> .....	93
3.6	<i>Resumen de las ecuaciones de campo para el caso plano</i> .....	99
3.7	<i>Estudio de casos particulares</i> .....	101
3.7.1	Esfuerzo axial.....	101
3.7.2	Momentos flectores y esfuerzos cortantes.....	102
3.7.3	Esfuerzo axial, momentos flectores y esfuerzos cortantes. ....	108
3.8	<i>Ejercicios resueltos</i> .....	113
3.8.1	Estudio de un perfil en Z sometido a flexión en dos direcciones .....	113
3.8.2	Estudio de un perfil en I sometido a cortante y flexión .....	115
3.8.3	Estudio tensional de una sección triangular.....	118
3.8.4	Cálculo del Núcleo de una sección en cruz .....	121
3.8.5	Cálculo del Núcleo Central de una sección circular.....	122
<b>4</b>	<b>Tracción y Flexión en secciones de pared delgada</b> .....	<b>125</b>
4.1	<i>Hipótesis cinemáticas</i> .....	127
4.2	<i>Cálculo de tensiones</i> .....	130
4.2.1	Perfiles abiertos .....	132
4.2.2	Perfiles cerrados .....	133
4.3	<i>Centro de esfuerzos cortantes</i> .....	135
4.4	<i>Consideraciones sobre simetría en perfiles</i> .....	140
4.5	<i>Ejercicios resueltos</i> .....	142
4.5.1	Tensiones en un perfil en L sometido a flexo-tracción .....	142
4.5.2	Flujo de tensiones tangenciales en un perfil en U .....	143
4.5.3	Flujo de tensiones tangenciales en un perfil en I.....	148
4.5.4	Flujo de tensiones tangenciales en un perfil abierto en Z .....	151
4.5.5	Cálculo del CEC en un perfil abierto en L .....	154
4.5.6	Cálculo del CEC en un perfil abierto en $\Omega$ .....	156
4.5.7	Cálculo del CEC en un perfil tubular abierto .....	158
4.5.8	Cálculo del CEC en un perfil cerrado semicircular .....	159
4.5.9	Cálculo del CEC en un perfil con parte cerrada y parte abierta .....	161
<b>5</b>	<b>Leyes de esfuerzos y cálculo de movimientos</b> .....	<b>165</b>
5.1	<i>Leyes de esfuerzos</i> .....	165
5.2	<i>Cálculo de movimientos</i> .....	173
5.3	<i>Nudos libres y soportes. Grados de libertad</i> .....	180
5.4	<i>Ejercicios resueltos</i> .....	185

5.4.1	Diagramas de esfuerzos en vigas I .....	185
5.4.2	Diagramas de esfuerzos en vigas II .....	186
5.4.3	Diagramas de esfuerzos en vigas III .....	188
5.4.4	Diagramas de esfuerzos y cálculo de movimientos en una viga .....	190
5.4.5	Elástica de una viga apoyada sometida a una carga puntual .....	192
5.4.6	Elástica de una viga en voladizo con una carga en su extremo .....	195
5.4.7	Elástica de una viga en voladizo sometida a una carga distribuida .....	197
<b>6</b>	<b>Métodos de cálculo de estructuras. el método de las fuerzas .....</b>	<b>199</b>
6.1	<i>Uso de simetría en estructuras .....</i>	<i>200</i>
6.2	<i>Hiperestaticidad e isostaticidad .....</i>	<i>204</i>
6.3	<i>El método de las fuerzas .....</i>	<i>210</i>
6.4	<i>Ejercicios resueltos .....</i>	<i>215</i>
6.4.1	Diagramas de esfuerzos en una viga continua con libertades .....	215
6.4.2	Diagramas de esfuerzos en un pórtico .....	217
6.4.3	Diagramas de esfuerzos en una estructura en celosía .....	219
6.4.4	Diagramas y movimientos en una viga empotrada-apoyada .....	221
6.4.5	Diagramas y movimientos en una viga biempotrada .....	224
6.4.6	Diagramas y movimientos en una estructura abierta I .....	227
6.4.7	Diagramas y movimientos en una estructura abierta II .....	229
6.4.8	Diagramas y movimientos en una estructura abierta II .....	232
6.4.9	Diagramas y movimientos en una estructura cerrada I .....	234
6.4.10	Diagramas y movimientos en una estructura cerrada II .....	235
6.4.11	Diagramas y movimientos en una estructura cerrada III .....	237
<b>7</b>	<b>Pandeo de piezas prismáticas .....</b>	<b>241</b>
7.1	<i>Teoría clásica. Problema de euler. ....</i>	<i>243</i>
7.2	<i>Ecuación general de la viga-columna .....</i>	<i>249</i>
7.3	<i>Pandeo de barras con imperfecciones .....</i>	<i>253</i>
7.3.1	Barra con carga excéntrica .....	253
7.3.2	Barra con deformación previa .....	255
7.4	<i>Método práctico de cálculo para barras a compresión .....</i>	<i>258</i>
7.5	<i>Ejercicios resueltos .....</i>	<i>263</i>
7.5.1	Cálculo de carga crítica en una viga columna I .....	263
7.5.2	Cálculo de carga crítica en una viga columna II .....	264
7.5.3	Cálculo de carga crítica en una viga columna III .....	265
7.5.4	Cálculo de carga crítica de una biela .....	267
7.5.5	Estudio a compresión de un pilar .....	268
7.5.6	Carga máxima en un pilar comprimido. Uso del método práctico .....	269
<b>8</b>	<b>Torsión libre .....</b>	<b>271</b>
8.1	<i>Consideraciones cinemáticas .....</i>	<i>273</i>
8.2	<i>El problema de la torsión en barras de sección circular .....</i>	<i>274</i>
8.3	<i>Torsión en ejes de sección rectangular .....</i>	<i>278</i>
8.4	<i>Torsión en perfiles de pared delgada .....</i>	<i>279</i>
8.4.1	Hipótesis cinemáticas .....	279
8.4.2	Estudio de perfiles abiertos .....	280
8.4.3	Estudio de perfiles cerrados .....	282
8.4.4	Comparación entre perfiles abiertos y cerrados .....	285
8.5	<i>Ecuaciones monodimensionales de la barra a torsión libre .....</i>	<i>287</i>

8.6	<i>Ejercicios resueltos</i> .....	289
8.6.1	Cálculo de diagramas y desplazamientos en una ménsula 3D .....	289
8.6.2	Torsión libre en un perfil de pared delgada abierto .....	291
8.6.3	Torsión libre en un perfil de pared delgada cerrado unicelular .....	293
8.6.4	Torsión y Cortante. Comparación entre perfiles abiertos y cerrados.....	294
<b>Apéndice 1</b>	<b>Propiedades geométricas de las secciones</b> .....	<b>299</b>
A1.1	<i>Cálculo del centro de gravedad de áreas planas</i> .....	299
A1.2	<i>Cálculo del tensor de inercia de áreas planas</i> .....	302
A1.3	<i>Ejemplos de cálculo de propiedades geométricas</i> .....	306
A1.3.1	Ejercicio 1.....	306
A1.3.2	Ejercicio 2.....	307
A1.4	<i>Propiedades de secciones llenas y de pared delgada</i> .....	308
A1.5	<i>Características geométricas de perfiles comerciales</i> .....	311
<b>Apéndice 2</b>	<b>Alcance y validez de las hipótesis del modelo de barras</b> .....	<b>315</b>
A2.1	<i>Viga rectangular simplemente apoyada</i> .....	316
A2.1.1	Caso de flexión pura.....	316
A2.1.2	Caso de carga distribuida.....	319
A2.2	<i>Viga en voladizo sometida a una carga puntual</i> .....	329
A2.2.1	Sección circular llena.....	330
A2.2.2	Sección tubular de pared delgada.....	332
<b>Apéndice 3</b>	<b>Reflexiones sobre el pandeo de barras prismáticas</b> .....	<b>335</b>
A3.1	<i>Conceptos de estabilidad e inestabilidad</i> .....	335
A3.2	<i>Teoría clásica de 2º orden</i> .....	336
A3.3	<i>Estudio de la viga columna con grandes rotaciones</i> .....	348
<b>Apéndice 4</b>	<b>Más allá del comportamiento elástico lineal</b> .....	<b>355</b>
A4.1	<i>Hipótesis</i> .....	355
A4.2	<i>Comportamiento plástico del punto</i> .....	357
A4.3	<i>Comportamiento plástico de la sección</i> .....	359
A4.4	<i>Colapso de estructuras</i> .....	366
A4.5	<i>Obtención de la carga de colapso mediante métodos directos</i> .....	369
A4.6	<i>El cálculo plástico en la normativa actual</i> .....	375
A4.7	<i>Ejercicios resueltos</i> .....	377
A4.7.1	Determinación del momento plástico en un perfil en H.....	377
A4.7.2	Determinación de la carga de colapso .....	379
<b>Apéndice 5</b>	<b>Problemas elegidos de Resistencia de Materiales</b> .....	<b>387</b>
A5.1	<i>El equilibrio del bastón</i> .....	388
A5.2	<i>Sobre la flexión pura</i> .....	390
A5.3	<i>Sobre la clotoide</i> .....	392
A5.4	<i>Sobre la forma de apoyar</i> .....	398
A5.5	<i>El efecto ballesta</i> .....	401
A5.6	<i>Las ruedas con radios</i> .....	410
A5.7	<i>Relé termostático</i> .....	414



---

<i>A5.8 Pandeo de mástil</i> .....	417
<i>A5.9 El empuje activo</i> .....	421
<i>A5.10 El empuje de los apoyos</i> .....	424
<i>A5.11 El efecto de la curvatura</i> .....	429
<i>A5.12 El efecto de triangular</i> .....	434
<i>A5.13 La triangulación de las estructuras</i> .....	443
<i>A5.14 El puente del caminito del rey</i> .....	449
<i>A5.15 Marquesina de aparcamiento</i> .....	456
<b>BIBLIOGRAFÍA</b> .....	<b>467</b>



# 1 CONCEPTOS BÁSICOS DEL SÓLIDO DEFORMABLE

---

*Ut tensio, sic vis*  
(Como la extensión, así la fuerza)

Hooke, R.

**P**odríamos decir genéricamente que el fin último de la Elasticidad y Resistencia de Materiales es el análisis y diseño de elementos resistentes. Al conjunto de elementos resistentes se le denomina estructura. El cumplimiento de dicho objetivo requiere hallar ciertas magnitudes asociadas al fenómeno resistente y compararlas con determinados valores límites. La determinación de dichas magnitudes es competencia de la Mecánica de Medios Continuos, entendiendo ésta como aquella parte de la Física que se ocupa de estudiar el comportamiento de los sólidos deformables.

Es un hecho bien comprobado experimentalmente que cuando un sólido es sometido a la acción de unas fuerzas, sus puntos experimentan desplazamientos que hacen que cambien sus posiciones. En determinadas situaciones el modelo de sólido rígido estudiado en las asignaturas de Mecánica es suficiente para predecir la evolución del sólido; en éste modelo no hay variación de la longitud de ningún segmento que une dos puntos arbitrarios del sólido. Sin embargo, hay un amplio conjunto de situaciones prácticas en las que el modelo de sólido rígido no es suficiente para predecir las características del comportamiento de los sólidos, debiendo recurrirse entonces al modelo de sólido deformable, modelo que relaja la hipótesis de invarianza de la distancia entre dos puntos arbitrarios del sólido. El estudio del sólido deformable se puede llevar a cabo a través de un modelo matemático que relaciona las fuerzas aplicadas en el sólido (causas) con los desplazamientos de sus puntos (efectos).

En este Capítulo definiremos dos magnitudes internas que van a permitir, por un lado, caracterizar cómo las cargas externas se transmiten por el interior del sólido y, por otro, visualizar los desplazamientos relativos entre puntos del sólido como cambios de forma y de volumen.

## 1.1 Introducción

El sólido bajo estudio se va a caracterizar mediante un modelo matemático que asocia cada partícula del sólido a un punto geométrico de coordenadas  $(x, y, z)$ . Las coordenadas pertenecen al campo de números reales, de tal modo que la continuidad de dicho campo recoge la continuidad del sólido. Desde el punto de la modelización se distinguen tres tipos de sólidos (Figura 1.1):

**Acotados:** Los sólidos tienen un contorno que encierra a un volumen finito.

**Semiinfinitos:** Los sólidos tienen un contorno que no lo acota en todas las direcciones. Es clásico para el estudio del comportamiento deformable de un suelo o de una presa.

**Infinitos:** Los sólidos no tienen contorno que acoten su volumen. Tal es el caso del túnel representado, si se analiza como un caso bidimensional.



Figura 1.1. Tipos de sólidos

Así, considérese el sólido acotado de la Figura 1.2a, de dominio (volumen)  $V [L^3]$  y contorno (superficie)  $S [L^2]$ , en el que se muestran las acciones externas típicas de un modelo de sólido deformable, acciones que son debidas a la función industrial que cumple el sólido objeto de estudio.

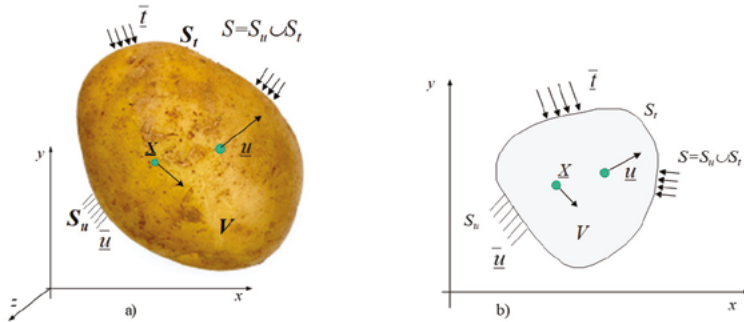


Figura 1.2. Sólido a estudiar

En primer lugar, sobre una parte del contorno que se denomina  $S_t$  actúan unas fuerzas por unidad de área  $[F/L^2]$ . Ejemplo de fuerza de superficie sería la presión ejercida por un gas o un líquido en el interior de un depósito o en una tubería de conducción. Estas fuerzas de contorno se denominarán  $\bar{T}$  representando genéricamente la notación  $\bar{T}$ , al vector de componentes  $\bar{T}_x, \bar{T}_y, \bar{T}_z$ , expresadas en un sistema de referencia cartesiano, e indicando la barra superior que se trata de una magnitud prescrita, es decir, de valor conocido. En segundo lugar, en cada elemento de volumen del sólido pueden actuar unas fuerzas de dominio que se denominan  $\bar{X}$ . Estas fuerzas actuarán por unidad de volumen  $[F/L^3]$  y como ejemplo de las mismas puede considerarse el peso propio del sólido. Por último, en la parte del contorno denominada  $S_u$ , los desplazamientos están prescritos, es decir, toman un valor conocido  $\bar{u}$ . Si el soporte del sólido en la zona  $S_u$  se considera totalmente rígido se tendrá  $\bar{u} = 0$ ; como ilustración de desplazamientos prescritos distintos de cero, citemos por ejemplo los descensos de los apoyos (cimientos) de una construcción civil, producidos por un asiento del terreno de valor conocido. En la parte de contorno que se ha denominado  $S_t$ , los desplazamientos son desconocidos y en la parte que se ha denominado  $S_u$ , las acciones actuantes son desconocidas recibiendo genéricamente el nombre de reacciones.

En todo lo que sigue las ideas básicas se ilustrarán sobre sólidos acotados y mediante una situación bidimensional (Figura 1.2b), que es la que se produciría en una chapa de espesor  $e$  muy pequeño respecto a sus dimensiones, y con las cargas actuantes contenidas en el plano de la misma; a dicho sólido se le denomina *laja*. Las variables que se irán introduciendo se suponen constantes en el espesor de la *laja*. Las ecuaciones establecidas se generalizarán posteriormente al caso de sólido acotado tridimensional.

Las acciones externas descritas (causas) crean unos desplazamientos (efectos) de cada punto del dominio que representaremos por un vector  $\underline{u}$ . La Teoría de la Elasticidad constituye un modelo matemático del sólido deformable que permite relacionar las acciones externas (causas)  $\bar{T}$ ,  $\bar{X}$  y  $\bar{u}$  con los desplazamientos  $\underline{u}$  en cada punto del volumen (efectos). Para ello, es necesario introducir un conjunto de variables internas (que se denominarán **tensiones**) que caracterizarán cómo se transmiten las fuerzas aplicadas por el interior del sólido, así

como otro conjunto de variables internas (que se denominarán **deformaciones**) que caracterizarán los cambios relativos de distancia entre puntos del sólido. Ambos conjuntos de variables internas deberán ser luego relacionados mediante la denominada ley de comportamiento.

Como hipótesis básicas de partida sobre el sólido objeto de estudio se admitirá que éste es **homogéneo** (es decir, que tiene las mismas propiedades en todos sus puntos), **isótropo** (es decir, que las propiedades mecánicas son independientes de la dirección), y tiene un comportamiento **elástico lineal**, lo que significa que al ser todas las ecuaciones lineales, la suma de las causas es igual a la de los efectos y el estado final del sólido es independiente del orden en que se apliquen las acciones. De este modo, al moverse los distintos puntos del sólido las fuerzas aplicadas hacen un trabajo, que se almacena en forma de energía elástica de deformación en el sólido; al eliminarse las fuerzas aplicadas el sólido vuelve a su estado indeformado, es decir, sin desplazamientos relativos de ninguno de sus puntos.

Respecto a la magnitud de los desplazamientos, admitimos que éstos son muy pequeños comparados con las dimensiones del sólido. Respecto a las fuerzas aplicadas, suponemos que se aplican de forma cuasiestática, siendo despreciables, por tanto, los efectos de la inercia.

## 1.2 Tensiones

Consideremos el sólido de la Figura 1.2b, y demos un corte imaginario por un plano genérico  $AB$  que contiene al punto  $P$  (Figura 1.3a), separando así el sólido en dos partes, de las cuales la parte inferior se muestra en la Figura 1.3b, y en la que  $ds$  es un elemento diferencial de la línea  $AB$ .

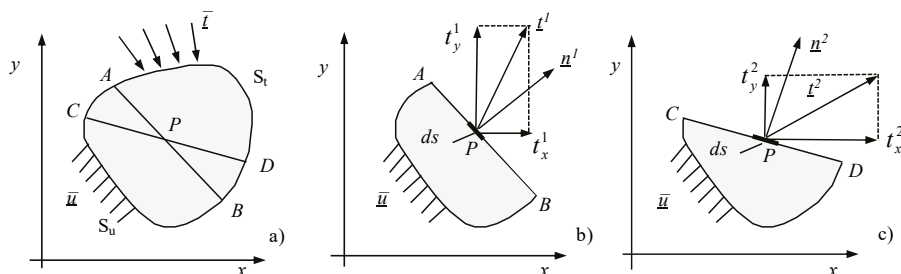


Figura 1.3. Acciones entre dos partes del sólido

Sobre un elemento de área  $dA=eds$  (siendo  $e$  el espesor) contenido en el plano de corte y centrado en el punto  $P$ , de vector unitario normal  $\underline{n}^1$ , la parte superior ejerce sobre la inferior una fuerza por unidad de área  $[F/L^2]$  de valor  $\underline{t}^1$ , que, en general, no coincidirá en la dirección con la normal  $\underline{n}^1$ , como se muestra en la Figura 1.3b. Se denomina a  $\underline{t}^1$  como el vector tensión

en el punto  $P$  asociado a un plano de vector unitario normal  $\underline{n}^l$ , siendo necesaria esa referencia a la normal, pues si dividimos el sólido en otras dos partes diferentes por otro plano  $CD$  que también contenga al punto  $P$  (Figura 1.3a y c), la acción ejercida por la parte superior sobre la inferior en el  $dA$  de normal  $\underline{n}^2$  cambiará y pasará a valer  $\underline{t}^2$ .

Conviene notar que el decir “demos un corte imaginario por un plano genérico” no excluye el que pueda emplearse una curva suave alternativa, en este caso la normal al plano en el punto  $P$  sería la normal a la tangente a la curva en dicho punto.

### 1.2.1 Lema de Cauchy

Teniendo en cuenta que por el punto  $P$  pueden pasar infinitos planos, con infinitos vectores tensión asociados, parece conveniente preguntarnos si existe algún conjunto finito de vectores tensión en el punto  $P$  a partir del cual se pueda calcular cualquier otro vector tensión asociado a un plano arbitrario que pase por dicho punto. La respuesta a dicha pregunta la da el Lema de Cauchy. Antes de enunciar y demostrar el Lema resulta conveniente hacer algunas definiciones. Comencemos por establecer una notación sobre las componentes de los vectores tensión asociados a los planos coordenados (Figura 1.4). Obsérvese que, aunque los vectores tensión se han representado sobre las caras de un cuadrado, no coincidiendo los orígenes de las normales y de los vectores tensión, ello es simplemente por claridad en la representación geométrica. El punto  $P$  no tiene dimensiones, por él pasan 2 planos de normal  $\underline{n}^x$  y  $\underline{n}^y$  y asociados a cada normal habrá un vector tensión. Cada uno de estos vectores tendrá 2 componentes (3 en el caso 3D) que representaremos mediante la siguiente notación:

$$\underline{t}^{n^x} = \begin{pmatrix} t_x^{n^x} = \sigma_{xx} \\ t_y^{n^x} = \sigma_{xy} \end{pmatrix} ; \quad \underline{t}^{n^y} = \begin{pmatrix} t_x^{n^y} = \sigma_{yx} \\ t_y^{n^y} = \sigma_{yy} \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

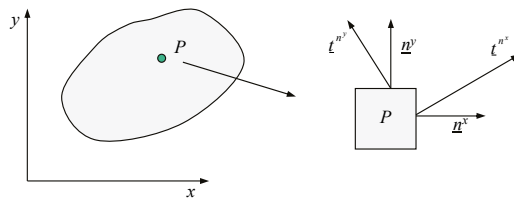


Figura 1.4. Estado tensional en el punto  $P$  asociado a los planos de referencia

donde  $\sigma_{ij}$  ( $i, j=x, y$ ) representa la componente del vector tensión asociado a un plano de normal  $i$  que lleva la dirección  $j$ . Las componentes de  $\sigma_{ij}$  en las que  $i$  coinciden con  $j$  ( $\sigma_{xx}$  y  $\sigma_{yy}$ ) reciben el nombre de tensiones normales ya que actúan perpendicular al plano considerado, mientras que las componentes en las que  $i$  no coincide con  $j$  ( $\sigma_{xy}$  y  $\sigma_{yx}$ ) reciben el nombre de tensiones tangenciales y actúan paralelas al plano considerado.

Conviene destacar el hecho de que geoméricamente hablando cada plano tiene dos normales opuestas y que existe un vector tensión asociado a cada una. Así, con referencia a la Figura 1.5, el vector tensión  $\underline{t}^{nA}$  representa la acción que el subdominio  $B$  ejerce sobre el subdominio  $A$  en el punto  $P$  a través del plano considerado y  $\underline{t}^{nB}$  la acción que  $A$  ejerce sobre  $B$ . Por el Principio de Acción y Reacción (3<sup>era</sup> Ley de Newton) ambas acciones son iguales y de signo contrario ( $\underline{t}^{nA} = -\underline{t}^{nB}$ )

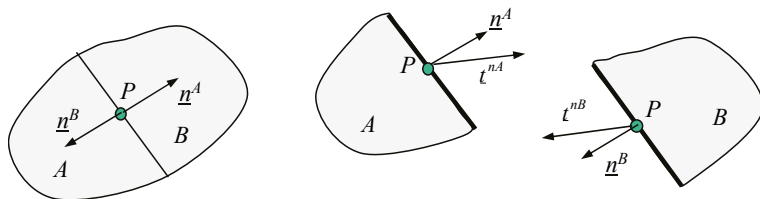


Figura 1.5. Acciones entre dos subdominios complementarios del sólido

Por tanto, no hay ambigüedad cuando se habla de vector tensión asociado a un plano. En base a esto, la representación del estado tensional en el punto  $P$  asociado a los planos de referencia es como la mostrada en la Figura 1.6. Así, si  $\sigma_{xx}$  o  $\sigma_{yy}$  son positivas representan una tracción, y si son negativas una compresión.

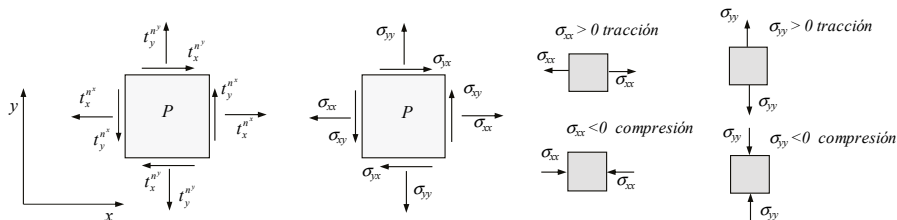


Figura 1.6. Estado tensional

Estas cuatro componentes ( $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{yx}$ ) dan lugar a lo que se denomina tensor de tensiones en el punto  $P$ .

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

Aunque no es realmente un criterio de signos sino una consecuencia del Principio de Acción y Reacción, se define como positiva una componente  $\sigma_{ij}$  del tensor de tensiones cuando, actuando en un plano de normal positiva (es decir, dirigida según el eje  $i$  positivo), lleva la dirección positiva del eje  $j$ , o cuando, actuando en un plano de normal negativa (es decir, dirigida según el eje  $i$  negativo), lleva la dirección negativa del eje  $j$ . Con esta definición,



todas las componentes del tensor de tensiones mostradas en la parte derecha de la Figura 1.6 son positivas.

De acuerdo con la idea discutida previamente, vamos a calcular el vector tensión  $\underline{t}^n$  en un punto  $P$  y según un plano genérico de normal  $\underline{n}$  a partir de las componentes del tensor de tensiones. Para ello, aislemos el triángulo  $ABC$  de la Figura 1.7 cuyos lados  $AB$  y  $AC$  miden respectivamente,  $dx$  y  $dy$ .

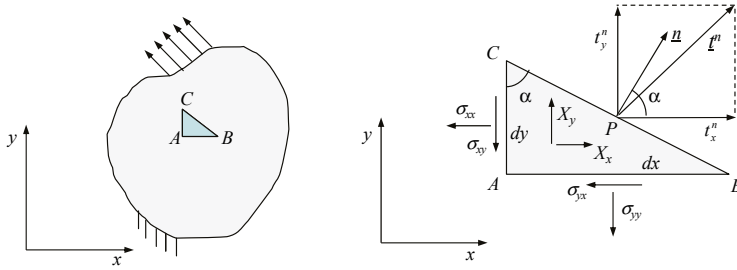


Figura 1.7. Acciones sobre un triángulo

Admitamos que las componentes del tensor de tensiones en las caras del triángulo ( $AB$  y  $AC$ ) son constantes, al igual que el vector tensión sobre la cara inclinada. Dichas tensiones representan la acción que el resto del dominio ejerce sobre el triángulo.

Asimismo, supongamos que las fuerzas por unidad de volumen son constantes en el interior del triángulo, siendo la resultante de las mismas el producto de  $\underline{X}$  por el volumen del sólido aislado, que es igual al área del triángulo ( $dxdy/2$ ) por el espesor  $e$ , actuando dicha resultante en el centro de gravedad del triángulo. Bajo estas condiciones el sólido debe estar en equilibrio de fuerzas y momentos. El equilibrio de fuerzas da lugar a:

$$\begin{aligned}\Sigma F_x = 0 &\Rightarrow -\sigma_{xx} edy - \sigma_{yx} edx + t_x^n eds + X_x e \frac{1}{2} dxdy = 0 \\ \Sigma F_y = 0 &\Rightarrow -\sigma_{xy} edy - \sigma_{yy} edx + t_y^n eds + X_y e \frac{1}{2} dxdy = 0\end{aligned}\quad (1.3)$$

Dividiendo por  $e$ , teniendo en cuenta que las componentes de  $\underline{n}$  son (Figura 1.7)  $(n_x, n_y) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$  y sustituyendo  $dx = ds \sin\alpha = n_y ds$ , y  $dy = ds \cos\alpha = n_x ds$ , se obtiene:

$$\begin{aligned}(-\sigma_{xx} n_x - \sigma_{yx} n_y + t_x^n) ds + X_x \frac{1}{2} n_x n_y ds^2 &= 0 \\ (-\sigma_{xy} n_x - \sigma_{yy} n_y + t_y^n) ds + X_y \frac{1}{2} n_x n_y ds^2 &= 0\end{aligned}\quad (1.4)$$

Dividiendo por  $ds$  las expresiones anteriores quedan como sigue:

$$\begin{aligned}
 (-\sigma_{xx} n_x - \sigma_{yx} n_y + t_x^n) + X_x \frac{1}{2} n_x n_y ds &= 0 \\
 (-\sigma_{xy} n_x - \sigma_{yy} n_y + t_y^n) + X_y \frac{1}{2} n_x n_y ds &= 0
 \end{aligned}
 \tag{1.5}$$

Si hacemos tender  $ds$  a cero, las dimensiones del triángulo tienden a cero y los valores constantes de las tensiones tienden a los valores tensionales en un punto, pudiendo despreciarse además el término de las fuerzas por unidad de volumen. Las ecuaciones anteriores, por tanto, adoptan la forma:

$$\begin{aligned}
 t_x^n &= \sigma_{xx} n_x + \sigma_{yx} n_y \\
 t_y^n &= \sigma_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y
 \end{aligned}
 \tag{1.6}$$

que son las relaciones que permiten obtener el vector tensión en un punto y según cualquier normal  $\underline{n}$  a partir de las componentes del tensor de tensiones en dicho punto. Estas relaciones constituyen el denominado Lema de Cauchy y pueden escribirse en forma matricial:

$$\underline{t}^n = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} \equiv \underline{t}^n = \underline{\sigma} \underline{n}
 \tag{1.7}$$

Si aplicamos ahora sobre el triángulo equilibrio de momentos respecto a cualquier punto (tomemos el punto  $P$ , por ejemplo), se obtendría, empleando la Figura 1.8 (donde se representa la resultante en cada cara así como la resultante de las fuerzas por unidad de volumen):

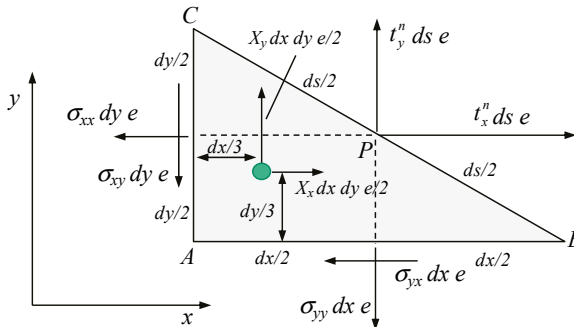


Figura 1.8. Fuerzas resultantes sobre las caras del triángulo diferencial aislado

$$\sigma_{xy} dy e \frac{dx}{2} - \sigma_{yx} dx e \frac{dy}{2} + X_x \frac{1}{2} dx dy e \left( \frac{dy}{2} - \frac{dy}{3} \right) - X_y \frac{1}{2} dx dy e \left( \frac{dx}{2} - \frac{dx}{3} \right) = 0 \quad (1.8)$$

Dividiendo por  $dy dx e/2$  la expresión (1.8) queda:

$$\sigma_{xy} - \sigma_{yx} + X_x \frac{1}{6} dy - X_y \frac{1}{6} dx = 0 \quad (1.9)$$

Haciendo tender a cero  $dy$  y  $dx$  resulta:

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} \quad (1.10)$$

lo que permite concluir que el tensor tensiones es simétrico.

Por último, para el caso tridimensional el Lema de Cauchy toma la forma:

$$\begin{pmatrix} t_x^n \\ t_y^n \\ t_z^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} ; \quad t^n = \underline{\underline{\sigma}} n \quad (1.11)$$

siendo el estado tensional tridimensional el mostrado en la Figura 1.9.

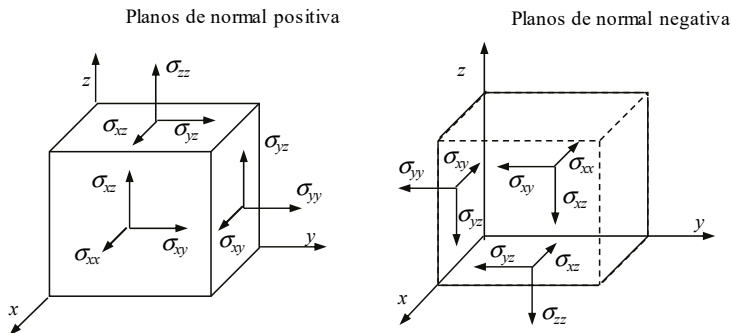


Figura 1.9. Representación gráfica del estado tensional tridimensional

## 1.2.2 Componentes del vector tensión

El vector tensión, como ya se ha comentado, es una magnitud vectorial definida a nivel de punto y asociada a cada plano que pasa por dicho punto, caracterizado por el vector normal al mismo. Como tal magnitud vectorial admite una representación global (Figura 1.10a), es decir, asociada a un sistema global de referencia ( $xy$  en 2D o  $xyz$  en 3D) y también una

representación intrínseca (Figura 1.10b), es decir, refiriendo sus componentes a la normal al plano y al plano tangente.

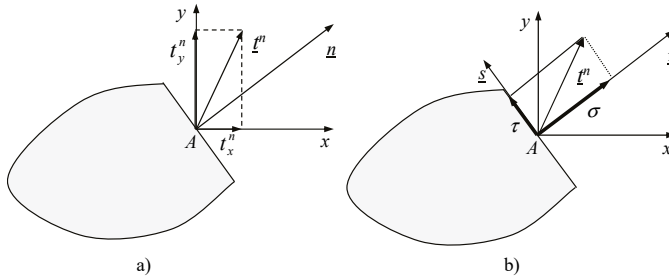


Figura 1.10. Representación del estado tensional. a) global, b) intrínseca

La proyección del vector tensión ( $\underline{t}^n$ ) sobre la normal se denomina tensión normal ( $\sigma$ ) y se obtiene haciendo el producto escalar del vector tensión por la normal:

$$\sigma = \underline{t}^n \cdot \underline{n} \quad (1.12)$$

La proyección del vector tensión sobre el plano al cual está asociado es la tensión tangencial y se obtiene multiplicando el vector tensión por un vector contenido en el plano tangente ( $\underline{s}$ ):

$$\tau = \underline{t}^n \cdot \underline{s} \quad (1.13)$$

El módulo de la tensión tangencial puede calcularse también por el Teorema de Pitágoras (ver Figura 1.10b):

$$\tau = \sqrt{|\underline{t}^n|^2 - \sigma^2} \quad (1.14)$$

En el caso tridimensional la expresión anterior proporciona sólo el módulo de la tensión tangencial, pero ésta tendría dos componentes que estarían asociadas al vector tangente ( $\underline{s}$ ) no conocido a priori pero sí calculable a partir de la dirección del vector tensión y del vector normal.

### 1.2.3 Ecuaciones de equilibrio interno

Admitiendo que el tensor de tensiones es una función continua, veamos cómo varía dicho tensor en el entorno de un punto. Para ello, supongamos conocido el tensor de tensiones en un punto genérico A. Aislamos un rectángulo diferencial de dimensiones  $dx$ ,  $dy$  siendo el punto A el vértice inferior (Figura 1.11). Sobre cada punto de cada cara del rectángulo habrá un vector tensión. Si el tensor de tensiones es una función continua podemos expresar cada componente del tensor en un punto genérico (P), que dista  $x_1$  ( $0 \leq x_1 \leq dx$ ) e  $y_1$  ( $0 \leq y_1 \leq dy$ ) del

punto  $A$ , mediante un desarrollo en serie del tensor del punto  $A$ , despreciando los infinitésimos de orden superior:

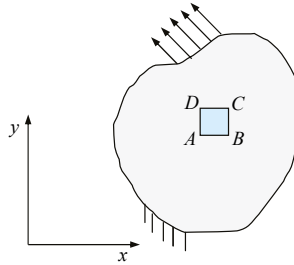


Figura 1.11. Rectángulo diferencial a aislar

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx}(P) &= \sigma_{xx}(A) + \left. \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \right|_A x_l + \left. \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y} \right|_A y_l \dots \\
 \sigma_{yy}(P) &= \sigma_{yy}(A) + \left. \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial x} \right|_A x_l + \left. \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \right|_A y_l \dots \\
 \sigma_{xy}(P) &= \sigma_{xy}(A) + \left. \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} \right|_A x_l + \left. \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \right|_A y_l \dots
 \end{aligned} \tag{1.15}$$

Si calculamos la resultante de fuerzas sobre cada cara y aplicamos equilibrio de fuerzas observamos que las variaciones de las tensiones sobre la cara no contribuyen a la ecuación de equilibrio. Así, si nos fijamos en la tensión  $\sigma_{xx}$  sobre las caras  $AD$  y  $BC$  y calculamos la resultante total en dirección  $x$  (Figura 1.12) tenemos

$$\begin{aligned}
 -F_x^{AD} + F_x^{BC} &= -\int_A^D (\sigma_{xx}(A) + \left. \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y} \right|_A y_l) dy + \int_B^C (\sigma_{xx}(A) + \left. \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \right|_A dx + \left. \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y} \right|_A y_l) dy = \\
 &= \int_0^{dy} -\sigma_{xx}(A) - \left. \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y} \right|_A y_l + \sigma_{xx}(A) + \left. \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \right|_A dx + \left. \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y} \right|_A y_l e dy_l = \\
 &= \int_0^{dy} \left. \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \right|_A dx e dy_l = \left. \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \right|_A dx e dy
 \end{aligned} \tag{1.16}$$

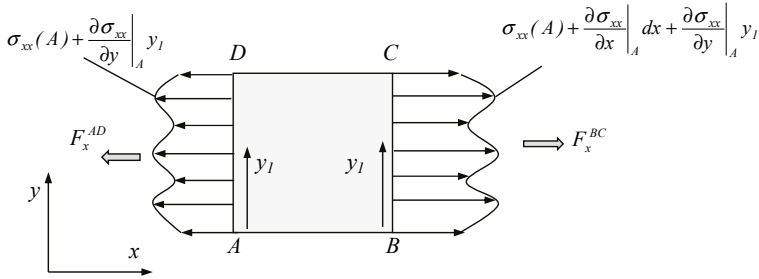


Figura 1.12. Estado tensional y fuerzas resultantes según  $x$  sobre las caras  $AD$  y  $BC$

Así, en cualquier punto de cada cara, las componentes de interés del vector tensión asociadas a dicha cara serán las mostradas en la Figura 1.13, donde hemos considerado que sobre la propia cara el estado tensional no varía y solo lo hace al pasar de un lado a otro.

El rectángulo  $ABCD$  tiene también unas fuerzas por unidad de volumen ( $X_x, X_y$ ) que pueden expresarse también como un desarrollo en serie de las fuerzas por unidad de volumen existentes en el punto  $A$ .

$$\begin{aligned}
 X_x(P) &= X_x(A) + \frac{\partial X_x}{\partial x} \Big|_A x_I + \frac{\partial X_x}{\partial y} \Big|_A y_I \dots \\
 X_y(P) &= X_y(A) + \frac{\partial X_y}{\partial x} \Big|_A x_I + \frac{\partial X_y}{\partial y} \Big|_A y_I \dots
 \end{aligned}
 \tag{1.17}$$

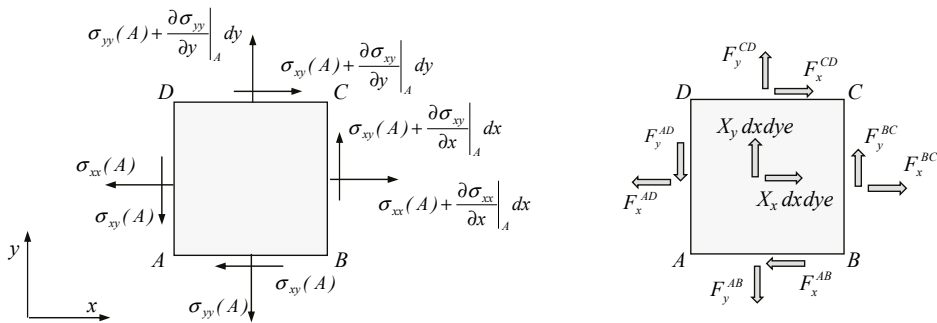


Figura 1.13. Estado tensional y fuerzas resultantes sobre un rectángulo diferencial

La resultante de las fuerzas por unidad de volumen en la dirección  $x$ , despreciando los infinitésimos de orden superior, vendrá dada por:

$$\begin{aligned}
& \int_V (X_x(A) + \frac{\partial X_x}{\partial x} \Big|_A x_l + \frac{\partial X_x}{\partial y} \Big|_A y_l) dV = \\
& = \int_0^{dx} \int_0^{dy} (X_x(A) + \frac{\partial X_x}{\partial x} \Big|_A x_l + \frac{\partial X_x}{\partial y} \Big|_A y_l) e dx_l dy_l = \\
& = (X_x(A) + \frac{\partial X_x}{\partial x} \Big|_A \frac{dx}{2} + \frac{\partial X_x}{\partial y} \Big|_A \frac{dy}{2}) e dx dy \approx X_x(A) e dx dy
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Análogamente para la dirección  $y$ , la resultante de las fuerzas por unidad de volumen es  $X_y e dx dy$ .

El equilibrio de fuerzas en dirección  $x$  e  $y$ , de las fuerzas viene dado por:

$$\begin{aligned}
\Sigma F_x = 0 & \Rightarrow -F_x^{AB} + F_x^{BC} + F_x^{CD} - F_x^{AD} + X_x dx dy e = 0 \Rightarrow \\
& \Rightarrow \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \Big|_A edxdy + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \Big|_A edxdy + X_x dx dy e = 0 \\
\Sigma F_y = 0 & \Rightarrow -F_y^{AB} + F_y^{BC} + F_y^{CD} - F_y^{AD} + X_y dx dy e = 0 \Rightarrow \\
& \Rightarrow \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} \Big|_A edxdy + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \Big|_A edxdy + X_y dx dy e = 0
\end{aligned} \tag{1.19}$$

Sacando factor común  $e dx dy$ , llegamos a las ecuaciones de equilibrio interno:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + X_x & = 0 \\
\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + X_y & = 0
\end{aligned} \tag{1.20}$$

Si además del equilibrio de fuerzas aplicásemos equilibrio de momentos, no obtendríamos ninguna ecuación adicional, ya que la simetría del tensor garantiza dicho equilibrio.

Para el caso tridimensional las ecuaciones de equilibrio interno son:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + X_x & = 0 \\
\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial z} + X_y & = 0 \\
\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + X_z & = 0
\end{aligned} \tag{1.21}$$

## 1.2.4 Transformación de coordenadas

Dado que el tensor de tensiones definido previamente lleva asociado un sistema de referencia  $(x, y)$ , nos planteamos ahora cómo cambia el tensor al cambiar de sistema de referencia. Así, sean  $(x', y')$  dos ejes coordenados obtenidos girando el sistema de ejes  $(x, y)$  un ángulo  $\beta$ , y sean  $\sigma_{ij}$  y  $\sigma'_{ij}$  los valores de las componentes del tensor de tensiones en los ejes  $(x, y)$  y  $(x', y')$ , como se muestra en la Figura 1.14, en las que se ha usado nuevamente la simetría de  $\underline{\sigma}$  y  $\underline{\sigma}'$ ; se trata de obtener los valores  $\sigma'_{ij}$  a partir de los de  $\sigma_{ij}$ .

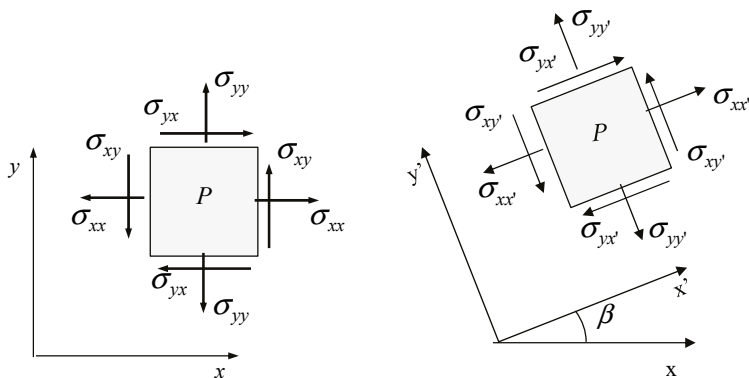


Figura 1.14. Cambio de sistema de referencia de un tensor

Dado que tenemos unas relaciones entre tensores y vectores (Lema de Cauchy), el conocimiento de cómo cambia de base un vector permitirá, usando el Lema de Cauchy, conocer cómo es el cambio del tensor. Por tanto, en relación a la Figura 1.15, las expresiones de cambio de base de un vector vendrán dadas por:

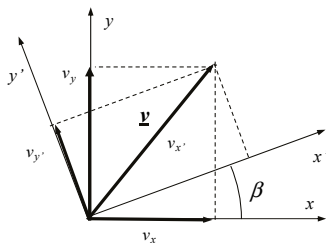


Figura 1.15. Cambio de base de un vector

$$\begin{aligned} v_x &= v_{x'} \cos \beta - v_{y'} \operatorname{sen} \beta \\ v_y &= v_{x'} \operatorname{sen} \beta + v_{y'} \cos \beta \end{aligned} \quad (1.22)$$



En forma matricial, resulta:

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{x'} \\ v_{y'} \end{pmatrix} ; \quad \underline{v} = \underline{L}\underline{v}' \quad (1.23)$$

siendo  $\underline{L}$  una matriz cuadrada  $2 \times 2$  que se denomina matriz de giro, cuyas dos columnas contienen los cosenos de los ángulos que forman los ejes  $(x', y')$  con los ejes  $(x, y)$ . Dicha matriz tiene la propiedad de ser ortogonal, su inversa es igual a su traspuesta ( $\underline{L}^{-1} = \underline{L}^T$ ).

Si expresamos el Lema de Cauchy en los ejes  $xy$  y  $x'y'$  se tiene que el vector tensión  $\underline{t}^n$  asociado a una normal  $\underline{n}$  en ambos sistemas vendrá dado por:

$$\begin{aligned} \underline{t}^n &= \underline{\sigma}\underline{n} \\ \underline{t}'^n &= \underline{\sigma}'\underline{n}' \end{aligned} \quad (1.24)$$

Si usamos la ecuación (1.23) para expresar  $\underline{t}^n$  y  $\underline{n}$  en los ejes  $x'y'$  se tiene:

$$\underline{L}\underline{t}'^n = \underline{\sigma}\underline{L}\underline{n}' \quad (1.25)$$

Multiplicando a la izquierda por  $\underline{L}^T$  se llega a:

$$\underline{t}'^n = \underline{L}^T \underline{\sigma} \underline{L} \underline{n}' \quad (1.26)$$

Comparando la expresión anterior con la ecuación (1.24) se llega a la ecuación que permite girar un tensor de unos ejes  $xy$  a otros ejes  $x'y'$ :

$$\underline{\sigma}' = \underline{L}^T \underline{\sigma} \underline{L} \quad (1.27)$$

## 1.2.5 Tensiones y direcciones principales

Resulta de particular interés investigar si hay algún sistema de referencia en el cual el tensor de tensiones se vuelve diagonal ( $\sigma_{xy}=0$ ), o lo que es lo mismo, un sistema en el cual los vectores tensión asociados a las direcciones de referencia coinciden con dichas direcciones de referencia. Dicho sistema de referencia existe (Figura 1.16) y su determinación se convierte en la resolución de un problema clásico de autovalores y autovectores.

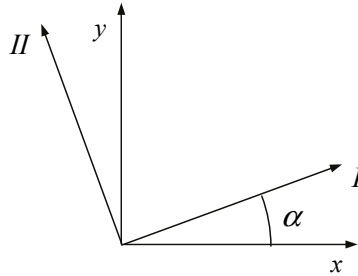


Figura 1.16. Sistema principal y sistema  $xy$

Los autovalores serían las componentes del tensor en el nuevo sistema de referencia que denominamos principal. A dichas componentes se les denominan tensiones principales y a los cosenos directores del nuevo sistema de referencia con respecto al original (autovectores) direcciones principales. Para el caso bidimensional las tensiones principales se obtendrían al resolver el siguiente determinante (problema de autovalores):

$$\left| \underline{\underline{\sigma}}^{xy} - I\sigma \right| = 0 \quad ; \quad \begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (1.28)$$

que conduce a la ecuación de 2º grado:

$$\sigma^2 - (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})\sigma + \sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{xy}^2 = 0 \quad (1.29)$$

Esta ecuación siempre tiene 2 raíces reales cuyo valor son las tensiones principales ( $\sigma$  y  $\sigma_{II}$ ):

$$\sigma_{I,II} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2} \quad (1.30)$$

El ángulo que forma la dirección principal I con el eje  $x$  ( $\alpha$ ) se obtendrá al resolver:

$$(\underline{\underline{\sigma}}^{xy} - I\sigma_I)\underline{n}^I = 0 \quad ; \quad \begin{pmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_I & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma_I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = 0 \quad (1.31)$$

de donde se obtienen dos ecuaciones que son combinación lineal una de la otra (el determinante es cero),sando una de ellas junto con la condición de normal unitaria:

$$\begin{aligned} (\sigma_{xx} - \sigma_I) \cos\alpha + \sigma_{xy} \sin\alpha = 0 \quad \text{o} \quad \sigma_{xy} \cos\alpha + (\sigma_{yy} - \sigma_I) \sin\alpha = 0 \\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{aligned} \quad (1.32)$$

se llega a:

$$\tan \alpha = -\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{yy} - \sigma_I} \quad (1.33)$$

Por tanto, el estado tensional en el sistema principal vendrá dado por:

$$\underline{\underline{\sigma}}^p = \begin{pmatrix} \sigma_I & 0 \\ 0 & \sigma_{II} \end{pmatrix} \quad (1.34)$$

Para el caso tridimensional las tensiones principales se obtendrían de resolver el determinante mostrado en la siguiente ecuación:

$$|\underline{\underline{\sigma}}^{xy} - I\underline{\underline{\sigma}}| = 0 \quad ; \quad \begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (1.35)$$

donde  $\sigma$  es el autovalor. La resolución conduce a una ecuación cúbica cuyas raíces, siempre reales, serían las tensiones principales ( $\sigma_I$ ,  $\sigma_{II}$  y  $\sigma_{III}$ ). Los coeficientes de la ecuación cúbica que resulta son invariantes, es decir, no cambian con independencia del sistema de referencia en el que se exprese  $\underline{\underline{\sigma}}$ .

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0$$

$$I_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = \sigma'_{xx} + \sigma'_{yy} + \sigma'_{zz}$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma'_{xx} & \sigma'_{xy} \\ \sigma'_{xy} & \sigma'_{yy} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma'_{xx} & \sigma'_{xz} \\ \sigma'_{xz} & \sigma'_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma'_{yy} & \sigma'_{yz} \\ \sigma'_{yz} & \sigma'_{zz} \end{vmatrix} \quad (1.36)$$

$$I_3 = |\underline{\underline{\sigma}}| = |\underline{\underline{\sigma}}'|$$

Las direcciones principales ( $\underline{n}^p$ ) se obtendrían de resolver:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x^p \\ n_y^p \\ n_z^p \end{pmatrix} ; \text{ con } (n_x^p)^2 + (n_y^p)^2 + (n_z^p)^2 = 1 \quad (1.37)$$

La principal utilidad de trabajar en el sistema principal es la determinación en un punto de los valores máximos de  $\sigma$  y  $\tau$ , ya que se trata de una operación mas sencilla si se realiza en el sistema principal. Así, puede demostrarse que en los planos principales la tensión normal ( $\sigma$ ) alcanza el máximo valor, mientras que en los planos que forman  $45^\circ$  con los principales son aquellos en los que la tensión tangencial ( $\tau$ ) alcanza sus valores máximos. El interés de

dichos planos reside en que si el fallo del material estuviese controlado por la tensión normal la rotura acontecerá en ese plano y si lo estuviese por la tensión tangencial el plano de rotura formará  $45^\circ$  con los ejes principales. Para un sólido sometido a tracción en la dirección del eje, como el mostrado en la Figura 1.17, puede demostrarse que la solución es la indicada y que los ejes  $x$  e  $y$  son principales.

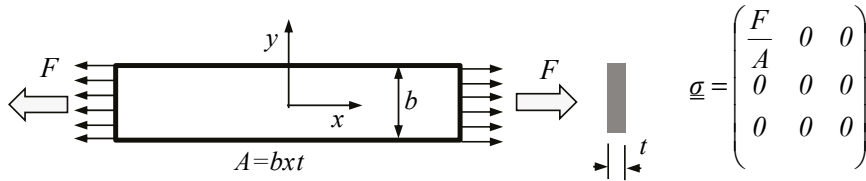


Figura 1.17. Sólido sometido a tracción

En la Figura 1.18 se muestran dos tipos de fallo, uno controlado por la tensión normal (rotura en un plano cuya normal es el eje  $x$ ) y otro controlado por la tensión tangencial (plano que forma  $45^\circ$  con el eje  $x$ ).

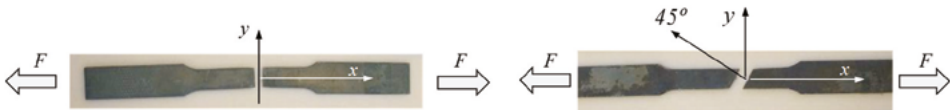


Figura 1.18. Fallos por tensión normal y tangencial

Además de estos planos hay un plano también de especial interés y es el que forma ángulos iguales con el sistema principal ( $\underline{n} = (\pm 1/\sqrt{3}, \pm 1/\sqrt{3}, \pm 1/\sqrt{3})$ ) a dicho plano se le denomina octaédrico y cuando la tensión tangencial asociada a dicho plano alcanza un determinado valor (que es función del material) el material abandona el comportamiento elástico.

### 1.3 Deformaciones

Como se ha comentado previamente, una de las características del sólido bajo estudio es que éste es deformable, es decir, bajo la acción de las fuerzas de contorno y de volumen la distancia entre dos puntos cualesquiera del sólido no permanece invariable. Supongamos un segmento diferencial  $AB$ , Figura 1.19, las coordenadas del punto  $B$  respecto a las del punto  $A$  serán  $dx$  y  $dy$  y se van a representar por el vector  $\underline{a}^T = (dx, dy)$ , de tal forma que la longitud ( $ds_0$ ) al cuadrado del segmento  $AB$  viene dada por:

$$ds_0^2 = dx^2 + dy^2 = \underline{a}^T \circ \underline{a} \quad (1.38)$$

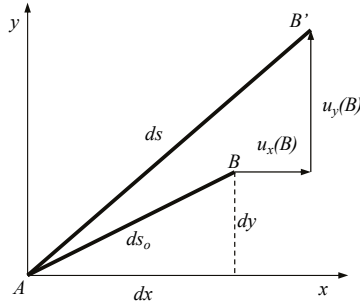


Figura 1.19. Estado deformado de un segmento diferencial

Si el segmento  $AB$ , como consecuencia de las acciones que actúan sobre el sólido, pasa a ocupar la posición  $AB'$ , la longitud al cuadrado del segmento deformado se expresará en función de los desplazamientos que el punto  $B$  ha sufrido para llegar hasta el punto  $B'$ . Dichos desplazamientos se pueden calcular mediante un desarrollo en serie a partir de los desplazamientos del punto  $A$ . Si sólo nos quedamos con los primeros términos del desarrollo, ya que consideramos que los desplazamientos y sus gradientes son pequeños<sup>1</sup>, se llega a:

$$\begin{aligned} u_x(B) &= u_x(A) + \left. \frac{\partial u_x}{\partial x} \right|_A (x_B - x_A) + \left. \frac{\partial u_x}{\partial y} \right|_A (y_B - y_A) + \dots \approx \left. \frac{\partial u_x}{\partial x} \right|_A dx + \left. \frac{\partial u_x}{\partial y} \right|_A dy \\ u_y(B) &= u_y(A) + \left. \frac{\partial u_y}{\partial x} \right|_A (x_B - x_A) + \left. \frac{\partial u_y}{\partial y} \right|_A (y_B - y_A) + \dots \approx \left. \frac{\partial u_y}{\partial x} \right|_A dx + \left. \frac{\partial u_y}{\partial y} \right|_A dy \end{aligned} \quad (1.39)$$

Si por simplicidad consideramos fijo el punto  $A$  como  $(u_x(A)=u_y(A)=0)$ , las expresiones anteriores pueden ser escritas en forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} u_x(B) \\ u_y(B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial u_x}{\partial x} \right|_A & \left. \frac{\partial u_x}{\partial y} \right|_A \\ \left. \frac{\partial u_y}{\partial x} \right|_A & \left. \frac{\partial u_y}{\partial y} \right|_A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} ; \quad \underline{u} = \underline{g} \circ \underline{a} \quad (1.40)$$

<sup>1</sup> Al despreciar el gradiente de desplazamiento frente a la unidad queremos decir que los desplazamientos relativos de puntos infinitamente próximos son muy pequeños. Dicha hipótesis es conocida en la Teoría de la Elasticidad como Hipótesis de Pequeñas Deformaciones.

Las nuevas coordenadas del punto  $B$  serán  $(dx+u_x(B), dy+u_y(B))$ . Así, la longitud ( $ds$ ) al cuadrado del segmento  $AB'$  vendrá dada por:

$$ds^2 = (dx+u_x(B))^2 + (dy+u_y(B))^2 = (\underline{a}^T + \underline{u}^T) \circ (\underline{a} + \underline{u}) \quad (1.41)$$

La diferencia de los cuadrados de las longitudes es una medida del cambio de distancia que experimenta el segmento diferencial  $AB$ :

$$ds^2 - ds_o^2 = (\underline{a}^T + \underline{u}^T) \circ (\underline{a} + \underline{u}) - \underline{a}^T \circ \underline{a} = \underline{a}^T \circ \underline{u} + \underline{u}^T \circ \underline{a} + \underline{u}^T \circ \underline{u} \quad (1.42)$$

Si despreciamos los infinitésimos de 2º orden (el producto  $\underline{u}^T \circ \underline{u}$ ) acorde con la hipótesis de pequeñas deformaciones, el cambio de distancia vendrá dado por:

$$ds^2 - ds_o^2 = \underline{a}^T \circ \underline{u} + \underline{u}^T \circ \underline{a} = \underline{a}^T \circ (\underline{g} + \underline{g}^T) \circ \underline{a} \quad (1.43)$$

Donde  $\underline{g} + \underline{g}^T$  es un tensor simétrico que al aplicarlo sobre  $\underline{a}$  (un vector) da lugar a otro vector. Si definimos el tensor de deformaciones como:

$$\underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\underline{g} + \underline{g}^T) \quad (1.44)$$

El cambio de distancia se expresa:

$$ds^2 - ds_o^2 = 2 \underline{a}^T \circ \underline{\varepsilon} \circ \underline{a} \quad (1.45)$$

Puede observarse que si  $\underline{\varepsilon}$  es cero no hay cambio de distancia y, por tanto, la situación final diferirá de la original sólo en un movimiento como sólido rígido. La expresión final del tensor de deformaciones en el punto A como función de los desplazamientos para pequeñas deformaciones (tensor de Cauchy), viene dada por:

$$\underline{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (1.46)$$

El tensor deformación es simétrico, al igual que el tensor de tensiones, y representa una medida del cambio de distancia entre puntos del sólido, medida ésta que, de conocerse para todos los segmentos diferenciales asociados a todos los puntos del sólido, bastaría para obtener el campo de desplazamientos.

Para el caso tridimensional el tensor de deformaciones viene dado por:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (1.47)$$

### 1.3.1 Significado geométrico de las componentes del tensor de deformaciones

Para entender el significado geométrico que tienen las componentes del tensor de deformaciones veamos cómo se moverían los extremos de dos segmentos diferenciales que llevan la dirección de los ejes  $x$  y  $y$  en relación al origen de dicho sistema de referencia (Figura 1.20), asumiendo que están contenidas en un sólido deformable sometido a la acción de unas fuerzas exteriores en equilibrio.

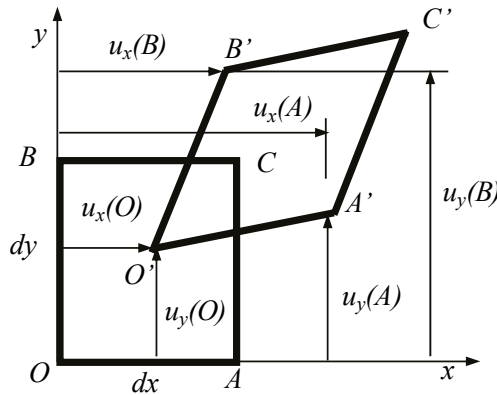


Figura 1.20. Movimientos en el entorno de un punto

Dado que los puntos  $A$  y  $B$  distan un diferencial del punto  $O$  y que el campo de desplazamientos debe ser una función continua y univaluada, un desarrollo en serie nos permite conocer los desplazamientos de los puntos  $A$  y  $B$  a partir de los desplazamientos del punto  $O$ .

$$\begin{aligned}
 u_x(A) &= u_x(O) + \left. \frac{\partial u_x}{\partial x} \right|_O (x_A - x_O) + \dots; u_x(B) = u_x(O) + \left. \frac{\partial u_x}{\partial y} \right|_O (y_B - y_O) + \dots \\
 u_y(A) &= u_y(O) + \left. \frac{\partial u_y}{\partial x} \right|_O (x_A - x_O) + \dots; u_y(B) = u_y(O) + \left. \frac{\partial u_y}{\partial y} \right|_O (y_B - y_O) + \dots
 \end{aligned}
 \tag{1.48}$$

Si nos quedamos sólo con los primeros términos del desarrollo (hipótesis de pequeñas deformaciones), las expresiones anteriores se reducen a:

$$\begin{aligned}
 u_x(A) &= u_x(O) + \left. \frac{\partial u_x}{\partial x} \right|_O dx; u_x(B) = u_x(O) + \left. \frac{\partial u_x}{\partial y} \right|_O dy \\
 u_y(A) &= u_y(O) + \left. \frac{\partial u_y}{\partial x} \right|_O dx; u_y(B) = u_y(O) + \left. \frac{\partial u_y}{\partial y} \right|_O dy
 \end{aligned}
 \tag{1.49}$$

Consideremos ahora la Figura 1.21 y calculemos el alargamiento unitario que experimenta un segmento diferencial ( $OA$ ) de longitud  $dx$  dirigido según el eje  $x$ . Este viene dado por el alargamiento del segmento  $dx$  ( $\Delta dx$ ) dividido por su longitud inicial ( $dx$ ), es decir:

$$\frac{\Delta dx}{dx} = \frac{u_x(O) + \left. \frac{\partial u_x}{\partial x} \right|_O dx - u_x(O)}{dx} = \left. \frac{\partial u_x}{\partial x} \right|_O = \epsilon_{xx}
 \tag{1.50}$$

De acuerdo a la definición de las componentes del tensor deformación  $\partial u_x / \partial x$  es lo que se ha denominado  $\epsilon_{xx}$ , por tanto  $\epsilon_{xx}$  representa el alargamiento unitario de un segmento diferencial  $dx$  dirigido según el eje  $x$ . Análogamente,  $\epsilon_{yy} = \partial u_y / \partial y$  representaría el alargamiento unitario de un segmento  $dy$  dirigido según el eje  $y$ .

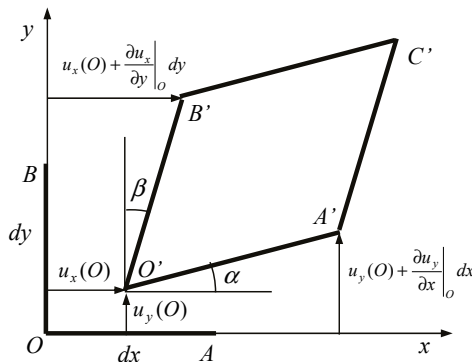


Figura 1.21. Interpretación de las componentes del campo de desplazamientos



Calculemos ahora el valor de la suma de los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  girados por dos segmentos perpendiculares  $dx$  y  $dy$  (Figura 1.21)  $\beta$ . Debido a que los desplazamientos son muy pequeños, los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  son igualmente muy pequeños, y se puede aproximar su tangente a los propios ángulos. De dicha figura se deduce que:

$$\tan \alpha \approx \alpha = \frac{u_y(O) + \left. \frac{\partial u_y}{\partial x} \right|_O dx - u_y(O)}{dx} = \left. \frac{\partial u_y}{\partial x} \right|_O \quad (1.51)$$

$$\tan \beta \approx \beta = \frac{u_x(O) + \left. \frac{\partial u_x}{\partial y} \right|_O dy - u_x(O)}{dy} = \left. \frac{\partial u_x}{\partial y} \right|_O$$

Obsérvese que  $\partial u_y / \partial x$  es positivo cuando  $u_y$  aumenta al movernos en la dirección positiva del eje  $x$ , es decir, cuando el segmento  $dx$  gira en el sentido contrario a las agujas del reloj, que es el sentido de giro positivo dado al ángulo  $\alpha$ . Análogamente,  $\partial u_x / \partial y$  es positivo cuando  $u_x$  aumenta al movernos en la dirección positiva del eje  $y$ , es decir cuando el segmento  $dy$  gira en el sentido de las agujas del reloj, que es el sentido de giro positivo del ángulo  $\beta$ , con lo que se obtiene:

$$\tan \beta + \tan \alpha \approx \beta + \alpha = \left. \frac{\partial u_x}{\partial y} \right|_O + \left. \frac{\partial u_y}{\partial x} \right|_O = \gamma_{xy} \quad (1.52)$$

que es la ecuación de la que se deduce el significado cinemático de la deformación angular:  $\gamma_{xy}$  representa la suma de los ángulos girados por dos segmentos infinitesimales, dirigidos según los ejes  $x$  e  $y$ , que inicialmente forman  $90^\circ$ ; la componente  $\varepsilon_{xy}$  del tensor de deformaciones es la mitad de la deformación angular  $\gamma_{xy}$ . ( $\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy}$ ). Nótese que el hecho de que  $\alpha$  y  $\beta$  sean muy pequeños implica que la base y la altura del rombo deformado pueden tomarse iguales a  $dx$  y  $dy$  (Figura 1.21), por lo que el área del rombo es  $dx \, dy$  (igual a la del elemento inicial). La implicación es, por tanto, que las deformaciones angulares no cambian el volumen del elemento.

Así pues, la deformación en el entorno de un punto viene caracterizada por un tensor de 3 componentes, ecuación (1.46), en el caso bidimensional y por 6 en el caso tridimensional, ecuación (1.47).

### 1.3.2 Obtención del campo de desplazamientos

Conocido el tensor de deformaciones la integración de las ecuaciones (1.46) permiten obtener el campo de desplazamientos ( $u_x$ ,  $u_y$ ). Vemos, sin embargo, que estas tres ecuaciones, que reproducimos nuevamente aquí, sólo incluyen dos incógnitas.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}; \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}; 2\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad (1.53)$$

En esta situación, nos preguntamos si cualquier campo de deformaciones es factible ya que hay más ecuaciones que incógnitas. La respuesta es no, el campo de deformaciones debe satisfacer determinadas condiciones para garantizar su integrabilidad. Desde un punto de vista físico, las deformaciones tienen que permitir que los cambios de forma y de volumen de todos los elementos del sólido sean compatibles entre sí, es decir, permitan la generación de un nuevo medio continuo (deformado). La forma de obtener dichas condiciones es derivando las ecuaciones (1.53) llegando así a las expresiones mostradas en (1.54) y combinando éstas para obtener una ecuación (1.55), que se denomina ecuación de compatibilidad en deformaciones.

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial y^2}; \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u_y}{\partial y \partial x^2}; \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 u_y}{\partial y \partial x^2} \quad (1.54)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (1.55)$$

Si el campo de deformaciones satisface la ecuación anterior ello garantiza que el campo de desplazamientos que de él deriva es univaluado y continuo. La integración en este caso es factible y se realiza como sigue:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} &\Rightarrow u_x = \int \varepsilon_{xx} dx + f(y) \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} &\Rightarrow u_y = \int \varepsilon_{yy} dy + g(x) \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} \int \varepsilon_{xx} dx + \frac{\partial}{\partial x} \int \varepsilon_{yy} dy + \frac{df(y)}{dy} + \frac{dg(x)}{dx} = \gamma_{xy} \end{aligned} \quad (1.56)$$

De la tercera ecuación se obtienen  $f(y)$  y  $g(x)$ .

Si el campo de deformaciones fuese nulo, la integración de las ecuaciones anteriores conduce a los siguientes valores de  $f(y)$  y  $g(x)$ :

$$\frac{df(y)}{dy} + \frac{dg(x)}{dx} = 0 \Rightarrow f(y) = Ay + B; g(x) = -Ax + C \quad (1.57)$$

que representan los movimientos como sólido rígido del sólido,  $B$  y  $C$  la traslación y  $A$  el giro.

Para el caso tridimensional el planteamiento es similar y las condiciones de integrabilidad son 6 ecuaciones que se denominan ecuaciones de compatibilidad de Saint-Venant.

### 1.3.3 Vector deformación. Componentes intrínsecas

Conviene destacar que el tensor de deformaciones matemáticamente presenta una estructura similar a la del tensor de tensiones y por ello también puede hablarse de vector deformación asociado a una normal  $\underline{\varepsilon}^n$ , así como de componentes intrínsecas ( $\varepsilon_n, \varepsilon_t$ ). En concreto:

$$\underline{\varepsilon}^n = \underline{\varepsilon} \underline{n} \quad ; \quad \varepsilon_n = \underline{\varepsilon}^n \underline{n} \quad ; \quad \varepsilon_t = \sqrt{|\underline{\varepsilon}^n|^2 - \varepsilon_n^2} \quad (1.58)$$

$\varepsilon_n$  representa la separación por unidad de longitud en la dirección de  $\underline{n}$  y  $\varepsilon_t$  el deslizamiento relativo de dos planos infinitamente próximos de normal  $\underline{n}$ .

Al igual que en el caso de las tensiones el tensor deformación se puede expresar en el sistema principal.

De especial interés resulta la componente normal del vector deformación, dado que dicha magnitud puede ser determinada experimentalmente en la superficie libre de los sólidos mediante una técnica denominada extensometría óhmica (Figura 1.22). Dicha técnica consiste básicamente en pegar en la superficie del sólido (descargado) un hilo conductor (galga extensométrica) que forma parte de un circuito eléctrico (Puente de Wheastone). Cuando el sólido se carga la galga se deforma y, como consecuencia, varía su resistencia eléctrica ya que ésta es función de la longitud y de la sección del hilo. Dicha variación de resistencia se correlaciona con el cambio de alguna magnitud eléctrica en el circuito (por ejemplo, el potencial) así, midiendo el voltaje puede calcularse cuánto se deformó la galga y, por tanto, el entorno del punto del sólido donde se encontraba pegada. La medición que realizamos es realmente la deformación normal ( $\varepsilon_n$ ) en el punto donde está adherida la galga extensométrica asociada a un plano cuya normal lleva la dirección de la galga.

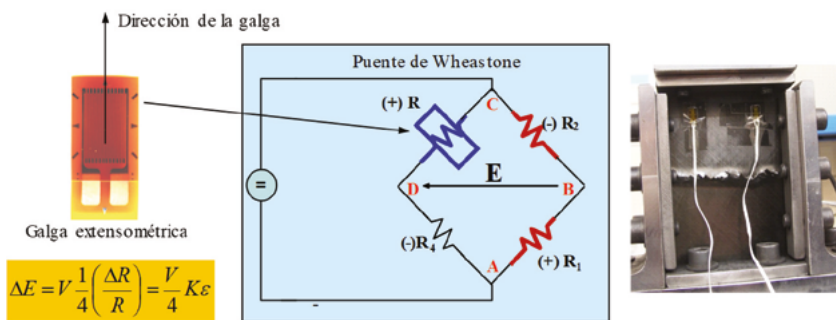


Figura 1.22. Extensometría óhmica

## 1.4 Relación tension-deformación

Hasta ahora no se ha introducido ninguna ecuación que contenga información relativa al tipo de material que conforma el sólido que estamos estudiando. Esta información se incluye en la ley de comportamiento, que relaciona las componentes del tensor de deformaciones con las del tensor de tensiones, y viceversa.

El científico inglés Hooke enunció en 1678 la idea clave para el establecimiento de la ley de comportamiento de los sólidos deformables: " Como la extensión, así la fuerza ", frase que refleja un concepto básico en los medios deformables: mientras más tensión actúe en un elemento de un sólido mayor será su deformación. El fundamento de la ley de comportamiento es puramente experimental, siendo el ensayo básico que permite obtener las características mecánicas de un material el denominado ensayo de tracción.

### 1.4.1 El ensayo de tracción

El ensayo de tracción consiste en someter una probeta de dimensiones conocidas a una carga de tracción hasta llevarla a rotura. Para ello, considérese un material, de cuyo volumen  $V$  (Figura 1.23) se extrae una barra (Probeta 1), cuyo eje va dirigido según el eje 2 y a la que someteríamos a una carga de tracción según su eje. Si se extrajese otra probeta (Probeta 2) y se cargara también según su eje el resultado sería el mismo siempre que el material fuese isótropo (propiedades independientes de la dirección) y homogéneo (propiedades iguales en todos los puntos).

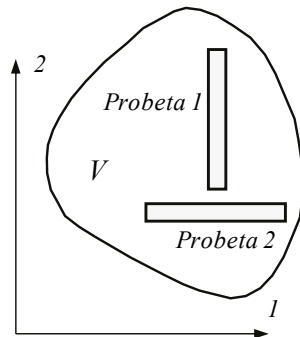


Figura 1.23. Probetas para el ensayo de tracción

A efectos de encuadrar los resultados en el esquema plano que se está usando como ilustración, se supone que la probeta de longitud  $L$  es una chapa de ancho  $b_o$  y espesor  $t_o$ , siendo, por tanto, el área de su sección transversal  $A=b_o \times t_o$ . En el ensayo de tracción la probeta es sometida a una fuerza  $F$  dirigida según su eje (Figura 1.24) tomándose en la misma una longitud calibrada  $L_o$ , para evitar las perturbaciones introducidas por el agarre de las mordazas de la máquina a la probeta en sus extremos. Dicha situación tiene solución

conocida, es decir, a partir de la carga y el desplazamiento podemos conocer las tensiones y deformaciones que se originan en el sólido (Figura 1.24).

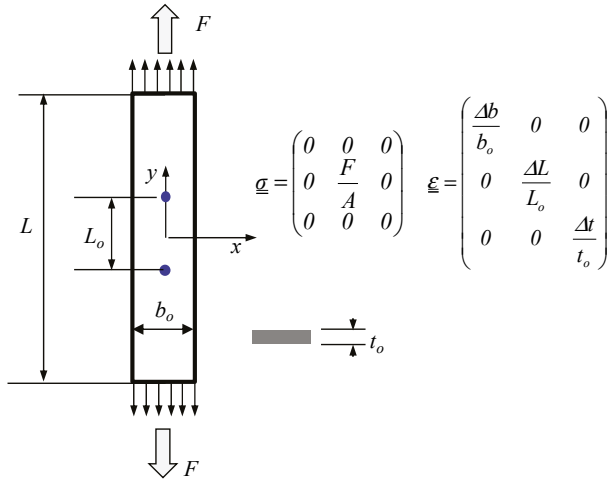


Figura 1.24. Estado de tensiones y deformaciones asociado al ensayo de tracción

En la zona calibrada de longitud  $L_o$  aparecen sólo deformaciones normales en la dirección de la tracción y en dirección perpendicular a la misma, no existiendo deformaciones angulares. Además, estos valores de las deformaciones son constantes en la zona calibrada. Estas conclusiones implican que en el ensayo de tracción, de acuerdo a los ejes de la Figura 1.24, sólo aparecen deformaciones  $\epsilon_{xx}$  y  $\epsilon_{yy}$  (y  $\epsilon_{zz}$ ). Por ser el valor de dichas deformaciones constante y a la vista de su significado geométrico, se deduce que  $\epsilon_{yy} = \Delta L / L_o > 0$ ,  $\epsilon_{xx} = \Delta b / b_o < 0$ , y  $\epsilon_{zz} = \Delta t / t_o < 0$ .

En cuanto a las tensiones, parece lógico asumir que son también constantes en la zona calibrada, teniendo en cuenta que las deformaciones lo son. Considerando que los contornos laterales ( $x = \pm b_o / 2$ ) de la zona calibrada están libres de tensiones, el Lema de Cauchy aplicado en dichos lados implica que sobre ellos debe cumplirse, y habida cuenta de que el ancho  $b$  será pequeño, parece razonable asumir que  $\sigma_{11} = \sigma_{12} = 0$  en todo el volumen del sólido, considerando una sola componente  $\sigma_{22}$  distinta de cero y constante en la zona calibrada. Dando un corte por un plano perpendicular al eje  $y$  y aislando el sólido que queda por encima, se obtiene por equilibrio  $F = \sigma_{22} A$ , es decir,  $\sigma_{22} = F / A$ .

El ensayo se lleva a cabo en una máquina universal provista de dos mordazas donde se agarra la probeta. El desplazamiento de una mordaza respecto a la otra origina el alargamiento de la probeta. La máquina está provista de una célula de carga que mide la fuerza que se requiere en cada momento para alargar la probeta (Figura 1.25). En cuanto a las deformaciones, éstas pueden ser medidas mediante los dispositivos experimentales, denominados galgas extensométricas ya comentados en el apartado anterior. También la

deformación puede ser medida mediante extensómetros que registran el incremento de desplazamientos entre dos puntos que distan una longitud inicial  $L_0$ .

Las geometrías de las probetas, la velocidad a la que se deforma la probeta, la precisión de los equipos de medición y todo lo relacionado con la realización del ensayo está normalizado. La norma europea más común para materiales metálicos es la norma UNE-EN 6892. En la Figura 1.25 se muestran las máquinas de ensayos y en la Figura 1.26 algunas geometrías de probetas normalizadas

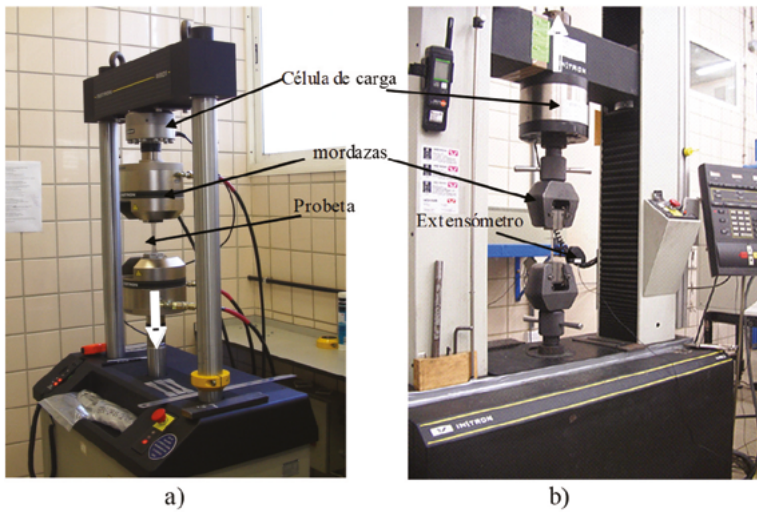


Figura 1.25. Máquinas Universales de ensayo. a) Hidráulica. b) Electromecánica



Figura 1.26. Geometrías de probetas para el ensayo de tracción

Los resultados del ensayo pueden representarse en un diagrama  $\sigma$ - $\varepsilon$ , siendo  $\sigma=F/A$  y  $\varepsilon$  el alargamiento unitario en la dirección de la carga ( $\varepsilon=\Delta L/L_0$ ). Si la probeta es de un acero de bajo contenido en carbono (denominado acero suave) y el ensayo se lleva a cabo a temperatura ambiente, el resultado es como se muestra en el diagrama idealizado de la Figura 1.27.

Durante el periodo  $OA$  inicial del ensayo se produce un comportamiento lineal y elástico, caracterizado por la pendiente  $E$  de la recta  $OA$  (tangente del ángulo que forma la recta  $OA$  con el eje horizontal) y que se denomina **Módulo de Elasticidad** ( $E$ ). Durante este periodo, al irse alargando la probeta se produce un acortamiento transversal de la misma, que se traduce en una disminución del ancho inicial (es decir, en un decremento positivo que denominamos  $\Delta b$ ), produciéndose una deformación transversal negativa de valor  $\Delta b/b_0$ . El cociente entre la deformación transversal (cambiada de signo) y la deformación longitudinal es una propiedad del material denominada **Coefficiente de Poisson** ( $\nu$ ).

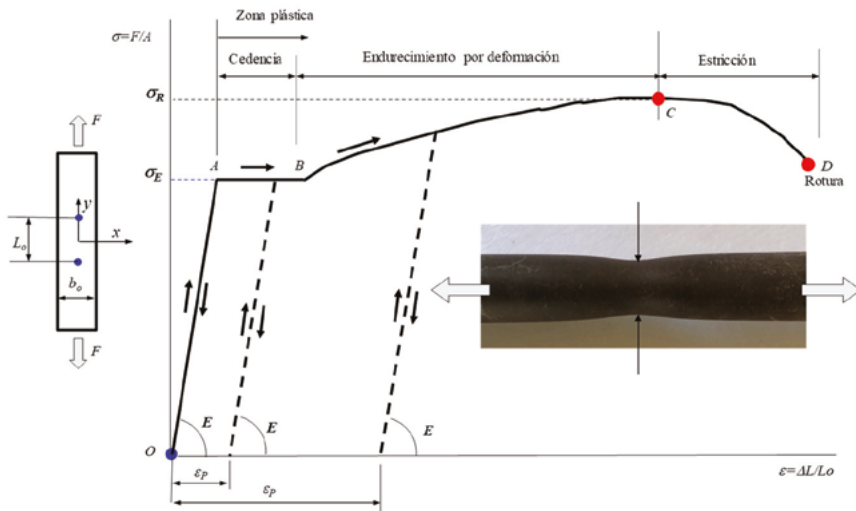


Figura 1.27. Diagrama  $\sigma$ - $\varepsilon$  del ensayo de tracción

Tanto el Módulo de Elasticidad, que se suele también denominar Módulo de Young, como el Coeficiente de Poisson son propiedades del material que, salvo por la acción de la temperatura, son difícilmente alterables<sup>2</sup>. En este tramo el comportamiento del material es totalmente reversible (elástico) y proporcional (lineal), es decir, a doble carga doble deformación y si quitamos la carga el material recorre la recta  $OA$  en sentido contrario, el material se comporta como un muelle.

<sup>2</sup> Todos los aceros con independencia del tratamiento térmico que hayan experimentado o incluso de los elementos aleantes que contengan tienen el mismo Módulo de Elasticidad ( $E=210 \text{ GPa}$ ).

Si seguimos aumentando la carga llega un momento en que se pierde la proporcionalidad para un determinado valor de  $\sigma$ . A partir de aquí el material tiene un comportamiento no lineal, pero sigue siendo elástico hasta que se alcanza un valor de  $\sigma = \sigma_E$  que denominamos **Límite Elástico** y para el que el material abandona el comportamiento elástico lineal (plastifica, es decir sufre deformaciones permanentes). En general, el límite de proporcionalidad y el límite elástico son valores muy cercanos entre sí, (para los aceros suaves) por lo que no se suelen distinguir ambos, hablándose solamente de límite elástico. A diferencia del Módulo de Elasticidad y del Coeficiente de Poisson el límite elástico de un material sí se altera, no solo con la temperatura, sino con la adición de elementos aleantes, un tratamiento térmico o deformando el material, como comentaremos más adelante. La deformación al final del periodo elástico para un acero suave se estima entre un 0.1 y un 0.2%.

Como se ha dicho, a partir del punto *A*, ( $\sigma = \sigma_E$ ), se produce la plastificación del material. Si se mantiene la fuerza que crea la tensión  $\sigma_E$  en el punto *A*, se produce una evolución a lo largo de la línea *AB*, denominada escalón de fluencia, en la que la deformación aumenta a tensión constante. Este fenómeno, que no se produce en todos los materiales, es debido a la presencia de bandas de deformación plástica que se propagan a lo largo de la probeta (bandas de Lüders) y que originan deformación longitudinal sin que la carga aumente. Alcanzado un determinado nivel de deformación (del orden del 1%), para seguir deformando la probeta es necesario aumentar la carga.

El tramo *BC* de la curva se denomina endurecimiento por deformación. A partir del punto *C*, punto de máxima tensión (**Resistencia a la Tracción**,  $\sigma_R$ ) se puede producir una brusca disminución de la sección central de la probeta (estricción) que se agrava hasta que se produce la rotura en el punto *D*. La rotura puede ser de diferente aspecto dependiendo del material. En probetas cilíndricas en las que se produce estricción la rotura suele ser de tipo copa-cono. En la Figura 1.28 se muestran diferentes tipos de roturas así como la estricción en una probeta cilíndrica.



Figura 1.28. Estricción de la probeta y tipos de roturas



Puede sorprendernos que el material rompa en el punto  $D$  en lugar del punto  $C$ , donde la tensión es más elevada, sin embargo, la respuesta es clara: en el punto  $D$  la tensión real es superior ya que, aunque la carga disminuya, la sección transversal debido a la estricción también disminuye y de forma más acusada siendo entonces el cociente es más alto. Como propiedad de material, se toma la resistencia a la tracción evaluada en el punto  $D$  con la sección original.

La plastificación del material (a partir del punto  $A$ ) provoca el fenómeno de irreversibilidad, que se traduce en que si en un punto cualquiera entre  $A$  y  $D$  se retira gradualmente la fuerza aplicada en el ensayo (lo que implica anular el valor de la tensión), se produce una descarga por una línea prácticamente paralela a la línea  $OA$ , y al desaparecer la tensión quedan unas deformaciones residuales que se denominan deformaciones plásticas  $\varepsilon_p$ . Las líneas de descarga representadas en la Figura 1.27 en los tramos  $AB$  y  $BD$  ilustran el comportamiento irreversible que se produce en el periodo plástico. El valor de máxima deformación plástica residual se denomina **Alargamiento Porcentual en Rotura**, se suele expresar en % y es una medida de la ductilidad del material. Para un acero de bajo contenido en carbono suele ser superior al 20%.

Conviene destacar que si descargamos el material en la zona de endurecimiento por deformación (zona  $BC$ ) y volvemos a cargarlo nuevamente, el material se comporta de forma elástica lineal hasta el punto donde se descargó, por lo que ha aumentado el límite elástico. Esta propiedad, por tanto, no sólo depende del material sino también de la historia de carga que haya podido experimentar el material.

Si consideramos sólo la zona donde el material experimenta un comportamiento elástico lineal, obtendríamos por un lado el Módulo de Elasticidad  $E$ , que es la pendiente de la zona lineal y se define como la tensión que es necesaria aplicar para originar una deformación en la misma dirección de valor unidad, tomando por tanto esta propiedad las mismas unidades que la tensión (fuerza por unidad de área). En el sistema internacional la unidad de medida es el Pascal ( $\text{N/m}^2$ ), pero dado que dicho módulo toma valores muy elevados, se suele expresar en GPa ( $10^9$  Pa). El Módulo de Elasticidad es una medida de la rigidez del material. A mayor módulo más rígido es el material (se deforma menos frente a igual valor de la tensión). Por otro lado, se obtiene también el Coeficiente de Poisson,  $\nu$ , que se define como el cociente entre la contracción transversal unitaria ( $\Delta b/b_o$ ) y el alargamiento longitudinal unitario ( $\Delta L/L_o$ ). En base a lo anterior  $E$  y  $\nu$  se definen matemáticamente como:

$$E = \frac{\sigma_{yy}}{\varepsilon_{yy}} \quad ; \quad \nu = -\frac{\Delta b / b_o}{\Delta L / L_o} = -\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{yy}} \quad (1.59)$$

De las ecuaciones (1.59) se deduce:

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\sigma_{yy}}{E} \quad ; \quad \varepsilon_{xx} = -\varepsilon_{yy}\nu = -\frac{\nu}{E}\sigma_{xx} \quad (1.60)$$

Obsérvese que  $\nu$  es positivo si el material se acorta transversalmente al alargarse longitudinalmente, cosa que sucede en todos los metales (materiales isótropos). Para todos los aceros  $E=210\text{ GPa}$  y  $\nu=0.3$ . Nótese que el alto valor de  $E$  hace que las deformaciones en el periodo elástico sean muy pequeñas, lo que en la práctica asocia la hipótesis de comportamiento lineal elástico con la de pequeñas deformaciones. Por ejemplo, en un acero de construcción<sup>3</sup> un valor típico del límite elástico es  $\sigma_E=235\text{ MPa}$ , lo que da una deformación al final del periodo elástico de  $235/210000=0.0011$ , es decir, que una longitud  $L$  tendría un incremento de longitud  $\Delta L=0.0011L$  (por ejemplo, 1 m de probeta se alargaría 1.1 mm). Estas cifras dan una orientación cuantitativa del orden de magnitud de los desplazamientos y deformación que se originaría al someter una barra de acero a tracción. Valores típicos de  $E$ ,  $\nu$ ,  $\sigma_E$ ,  $\sigma_R$  y  $A$  (Alargamiento Porcentual a Rotura) para diferentes metales se muestran en la tabla adjunta.

Tabla 1.1. Valores de propiedades medidas en el ensayo de tracción para distintos metales

Material	$E$ (GPa)	$\nu$	$\sigma_E$ (MPa)	$\sigma_R$ (MPa)	$A$ (%)
Acero S235;S275;S350	210	0.3	235 ; 275 ; 350	360 ; 430 ; 510	>15
Acero Inox 316	210	0.3	206	500	>40
Aluminio 2024 T3	70	0.33	310	430	>12
Aluminio 6061 T6	70	0.33	290	240	>12
Aluminio 7075 T6	70	0.33	500	560	>10
Magnesio	45	0.35	150	220	<5
Titanio 6Al4V	116	0.34	830	1000	>10
Inconel	205	0.31	1100	1400	>20
Bronce al aluminio	80-120	0.3	270-500	600-900	>10

La Figura 1.29 muestra las gráficas del ensayo de tracción de materiales usuales. Puede observarse que todos experimentan, hasta cierto nivel de carga, un comportamiento lineal y que para un material genérico la pendiente de la recta no depende prácticamente del tratamiento o aleación (ver por ejemplo las aleaciones de aluminio o el acero).

<sup>3</sup> Los aceros normalmente usados en las construcciones civiles son aceros de bajo contenido en carbono denominándose S### representado los tres símbolos de # tres dígitos que indican el límite elástico expresado en MPa, los tres aceros más usados son el S235, el S275 y el S355.

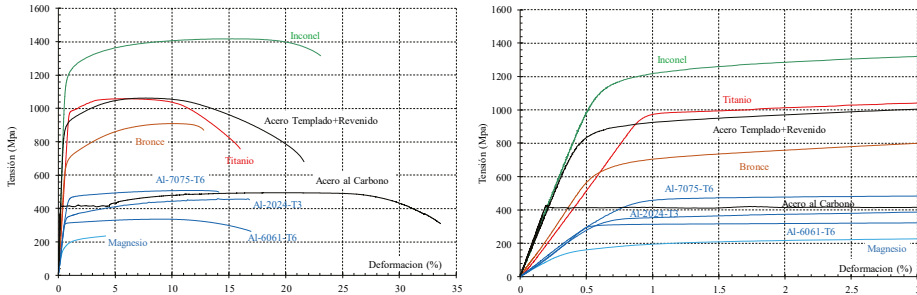
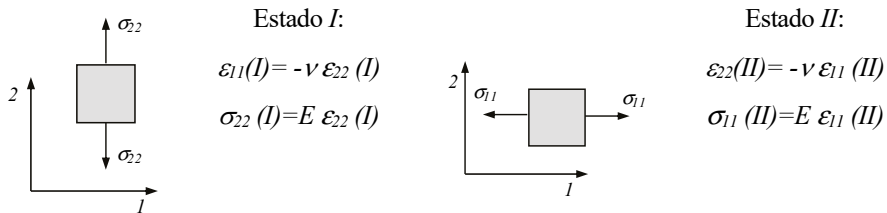


Figura 1.29. Gráficas del ensayo de tracción para diferentes metales

### 1.4.2 Ley de comportamiento para materiales isotrópicos

Las ecuaciones (1.60) representan la ley de comportamiento para un estado uniaxial de tensión. Conviene destacar que los resultados obtenidos para la probeta 1 son iguales en cualquier punto de la probeta. Si en lugar de haber extraído la probeta en la dirección 2 la hubiésemos extraído en la dirección 1 el resultado hubiese sido el mismo, de acuerdo a la hipótesis de isotropía. También hacer notar que, al ser las tensiones y deformaciones constantes, lo que ocurre en un punto es representativo de lo que ocurre en el sólido.



Para un estado biaxial y debido al comportamiento lineal, bastaría aplicar el principio de superposición (Figura 1.30).

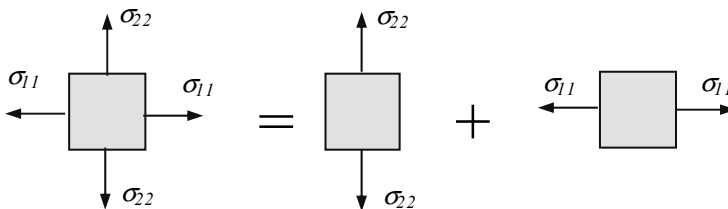


Figura 1.30. Estado biaxial

Así, la ley de comportamiento para el estado biaxial vendría dada por:

Estado Final: Estado  $I$  + Estado  $II$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \varepsilon_{11}(I) + \varepsilon_{11}(II) = -\nu \varepsilon_{22}(I) + \varepsilon_{11}(I) = \sigma_{11}/E - (\nu/E) \sigma_{22} \\ \varepsilon_{22} &= \varepsilon_{22}(I) + \varepsilon_{22}(II) = \varepsilon_{22}(I) - \nu \varepsilon_{11}(I) = \sigma_{22}/E - (\nu/E) \sigma_{11}\end{aligned}$$

que en forma tensorial (matricial) y con una sencilla manipulación intermedia, se pueden escribir como:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} \end{pmatrix} = \frac{1+\nu}{E} \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 \\ 0 & \sigma_{22} \end{pmatrix} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.61)$$

Las ecuaciones anteriores representarían la ley de comportamiento para un estado principal de tensiones y deformaciones. Ahora, al girar a unos ejes arbitrarios los tensores de la ecuación (1.61), se puede obtener cualquier tensor arbitrario de deformación o tensión. Así, girando a unos ejes cualesquiera  $(x, y)$ , que formen un ángulo  $\varphi$  con los ejes  $(1, 2)$ , se obtiene:

$$\begin{aligned}& \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = \\ & \frac{1+\nu}{E} \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 \\ 0 & \sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} - \\ & - \frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}\end{aligned} \quad (1.62)$$

Teniendo en cuenta que el producto matricial del último término vuelve a dar una matriz identidad de orden 2, y que  $\sigma_{11} + \sigma_{22}$  es un invariante del estado tensional ( $\sigma_{11} + \sigma_{22} = \sigma_{xx} + \sigma_{yy}$ ), las ecuaciones anteriores dan lugar a:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} \end{pmatrix} = \frac{1+\nu}{E} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.63)$$

que es la ley de comportamiento general de un material isótropo, cuyo comportamiento queda definido mediante dos constantes  $E$  y  $\nu$ , obtenibles experimentalmente del ensayo de tracción. Las expresiones deducidas de  $\varepsilon_{xx}$  y  $\varepsilon_{yy}$  son formalmente idénticas a las de las ecuaciones (1.61), y  $\varepsilon_{xy}$  se relaciona sólo con  $\sigma_{xy}$ , estando desacoplados los efectos normales y tangenciales.

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \gamma_{xy} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xy} \Rightarrow \sigma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} = G \gamma_{xy} \quad (1.64)$$

habiéndose definido el **Módulo de Cortadura**,  $G$ , también denominado a veces módulo de cizalladura o módulo de elasticidad transversal. A la vista del significado cinemático de la deformación angular  $\gamma_{xy}$  (Figura 1.21) parece un resultado lógico que las tensiones tangenciales  $\sigma_{xy}$  originen deformaciones angulares  $\gamma_{xy}$ , es decir, que transformen un cuadrado en un rombo.

Las ecuaciones (1.63) y (1.64) muestran el desacoplamiento entre las tensiones normales (que sólo crean deformaciones normales) y las tensiones tangenciales (que sólo crean deformaciones angulares). Sólo en los materiales isótropos este desacoplamiento se produce en cualquier sistema de ejes en que se expresen los tensores.

Para el caso tridimensional la ley de comportamiento sería:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})); \quad \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})); \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} (\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})) \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xy} \quad ; \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xz} \quad ; \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{yz} \end{aligned} \quad (1.65)$$

### 1.4.3 Efecto de la temperatura sobre la ley de comportamiento

Hasta ahora hemos considerado que las únicas acciones actuantes son acciones de dominio y de contorno. Además de éstas, la temperatura (que supondremos constante en el sólido y que no altera las propiedades mecánicas ya definidas) provoca deformación en el sólido. Si realizamos el experimento simple de calentar una varilla a una temperatura  $T$  sobre la que ya tendría, y vemos cómo varía su longitud en función de la temperatura, concluiremos que dicha variación viene dada por:

$$\Delta L = L \alpha T \quad (1.66)$$

siendo  $\alpha$  el coeficiente de dilatación lineal (para el acero toma el valor  $12 \cdot 10^{-6}$  mm/mm°C). Si recordamos que las deformaciones normales  $\varepsilon_{ij}$  ( $i=j$ ) representan los alargamientos unitarios, la deformación que se originaría en un sólido 2D (libre para dilatarse) sólo tendría componentes normales (no hay cambio de forma  $\varepsilon_{xy}=0$ ):

$$\varepsilon_{xx} = \alpha T \quad ; \quad \varepsilon_{yy} = \alpha T \quad (1.67)$$

Si el sólido no está libre para dilatarse deberán aparecer tensiones internas que contrarresten esta libre dilatación. La relación entre las deformaciones totales y las térmicas vendrá dada por la ley termoelástica:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}) + \alpha T ; \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}) + \alpha T ; \varepsilon_{xy} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xy} \quad (1.68)$$

Y para el caso tridimensional:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})) + \alpha T \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})) + \alpha T \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E}(\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})) + \alpha T \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xy} ; \varepsilon_{xz} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xz} ; \varepsilon_{yz} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{yz} \end{aligned} \quad (1.69)$$

Conviene destacar que, además del efecto como sollicitación que tiene la temperatura, esta también afecta a las propiedades elásticas ( $E$ ,  $\nu$ ,  $\alpha$ ,  $\sigma_E$ ) de forma que, a medida que aumenta la temperatura, la rigidez y el límite elástico disminuyen. Para el acero a partir de 150° C deberían tenerse en cuenta estas variaciones en las propiedades.

## 1.5 Condiciones de contorno

Al presentar en el apartado 1.1 el sólido elástico bajo estudio, se introdujeron ya las acciones que actuaban sobre el contorno de dicho sólido. De manera general, en cada punto del contorno se conocerá el valor de algunas de las variables asociadas al problema elástico bajo estudio o, al menos, se dispondrá de una relación entre ellas. Dicha información es lo que se denominan condiciones de contorno y en este apartado esbozaremos cómo se imponen. Las condiciones de contorno que trataremos son las que se denominan directas y que a su vez se subdividen en tres tipos: en tensiones, en desplazamientos y mixtas (Figura 1.31).

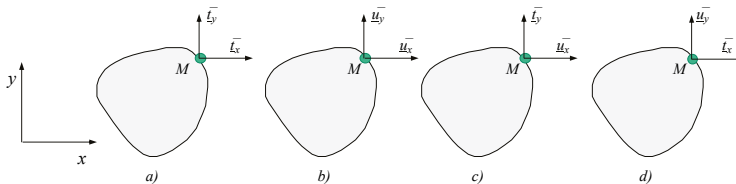


Figura 1.31. Condiciones de contorno. a) En tensiones, b) En desplazamientos, c) y d) Mixtas

Puede haber otro tipo de condiciones, por ejemplo, restricciones elásticas o condiciones de contacto, pero éstas no serán tratadas aquí.

**Condiciones de contorno en tensiones:** Se trata de las situaciones en las que se conocen las fuerzas por unidad de área que actúan en puntos del contorno. Estas fuerzas por unidad de área para un punto  $M$  concreto del contorno, ver Figura 1.31a, se representan mediante  $\bar{t}(M)$ , que debe coincidir con el vector tensión asociado, en ese punto  $M$ , al plano tangente al contorno (plano de normal  $\underline{n}$ ):

$$t^n(M) = \bar{t}(M) \tag{1.70}$$

La introducción del Lema de Cauchy en la relación anterior permitirá obtener el valor de algunas componentes del tensor del tensor de tensiones asociadas al punto  $M$  del contorno.

**Condiciones de contorno en desplazamientos:** Se trata de las situaciones en las que se conocen los desplazamientos de puntos del contorno. Estos desplazamientos prescritos para un punto  $M$  concreto del contorno, ver Figura 1.31b, se representan mediante  $\bar{u}(M)$ , detallándose entonces la condición:

$$u(M) = \bar{u}(M) \tag{1.71}$$

**Condiciones de contorno mixtas:** Se trata de las situaciones en las que para un mismo punto  $M$  del contorno existe una imposición en tensiones en una dirección y en desplazamientos en otra, ver Figura 1.31c y d. Esta condición se traduce en las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} t_y^n(M) &= \bar{t}_y(M) ; u_x(M) = \bar{u}_x(M) \\ 0 \\ t_x^n(M) &= \bar{t}_x(M) ; u_y(M) = \bar{u}_y(M) \end{aligned} \tag{1.72}$$

Los casos más usuales en la práctica de condiciones de contorno mixtas son los que se presentan en Figura 1.32.

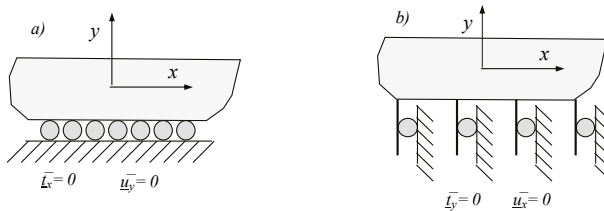


Figura 1.32. Condiciones mixtas habituales

## 1.6 Problema elástico

Como se comentó al principio del Capítulo, el objeto de la Elasticidad y Resistencia de Materiales es el estudio del sólido deformable, dicho estudio, pasa por conocer determinadas magnitudes, en concreto los desplazamientos y tensiones en cada punto del sólido.

En los apartados anteriores hemos definido unas magnitudes internas (tensiones y deformaciones) y se han relacionado con las externas (fuerzas y desplazamientos) (Figura 1.33) así como las ecuaciones que deben satisfacer para cada punto del sólido y que, para el caso plano, resumimos a continuación.

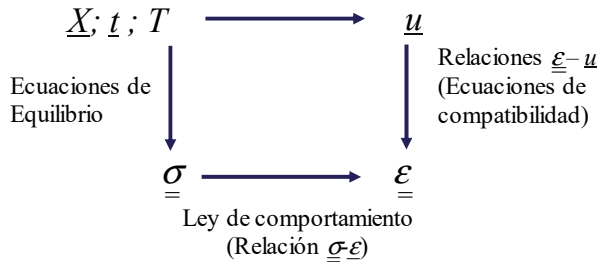


Figura 1.33. Problema elástico. Relación entre magnitudes

Ecuaciones de equilibrio:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + X_x &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + X_y &= 0 \end{aligned} \quad (1.73)$$

Relaciones  $\varepsilon$ - $u$ :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}; \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}; \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad (1.74)$$

Ley de comportamiento:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}) + \alpha T; \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}) + \alpha T; \varepsilon_{xy} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xy} \quad (1.75)$$



Si se contabiliza el número de ecuaciones e incógnitas se tiene:

Tabla 1.2. Resumen de ecuaciones e incógnitas

Tipo de Ec.	Nº de Ecs	Incógnitas nuevas que aporta
Equilibrio	2	$3 (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy})$
Relación $\varepsilon$ - $u$	3	$3 (\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}) + 2(u_x, u_y) = 5$
Relación $\sigma$ - $\varepsilon$	3	---
Total	8	8

Se observa que se obtiene un sistema determinado, es decir, con igual número de ecuaciones que de incógnitas<sup>4</sup>.

La integración de dicho sistema origina la aparición de constantes de integración, constantes que se determinan aplicando las condiciones de contorno.

La resolución del sistema no es trivial y, de hecho, sólo cuando la geometría del sólido es simple y las condiciones de contorno también, podemos obtener una solución analítica. Algunas alternativas para intentar simplificar la resolución pasan por reducir el número de incógnitas. Así, si combinamos adecuadamente las ecuaciones anteriores con objeto de eliminar las deformaciones y tensiones llegamos a una formulación sólo en desplazamientos (Ecuaciones de Navier). También podemos llegar a una formulación alternativa sólo en tensiones, eliminando desplazamientos y deformaciones (Ecuaciones de Beltrami-Michell y equilibrio). En cualquier caso, la resolución analítica es en la mayoría de las ocasiones inviable.

Se puede demostrar que la solución de tensiones, deformaciones y desplazamientos que satisfacen todas las ecuaciones ((1.73), (1.74), (1.75)) junto con las condiciones de contorno es única (Teorema de Unicidad) por lo que una estrategia de resolución es suponer un campo de tensiones (o de desplazamientos) y comprobar si satisface las ecuaciones.

<sup>4</sup> Para el caso tridimensional el número de ecuaciones e incógnitas es de 15.

## 1.7 Principio de Saint-Venant

El principio de Saint Venant (1855) se enuncia en la forma siguiente: “Si en un sólido elástico se aplica en una pequeña parte ( $\partial S_i$ ) de su contorno  $S_i$  un sistema de fuerzas de resultante nula y momento resultante nulo, las tensiones y deformaciones producidas en el volumen son despreciables a distancias de  $\partial S_i$  grandes comparadas con las dimensiones lineales de  $\partial S_i$ ” (Figura 1.34).

La zona donde los efectos son despreciables se denomina zona regularizada,  $ZR$ . Una consecuencia de este principio, que se conoce como enunciado alternativo de mayor utilidad práctica es que sistemas de igual resultante y momento resultante dan lugar al mismo campo de tensiones y deformaciones en la  $ZR$ . En la zona no regularizada,  $ZNR$ , las tensiones y las deformaciones dependen de la forma concreta en que se apliquen las fuerzas en  $\partial S_i$ .

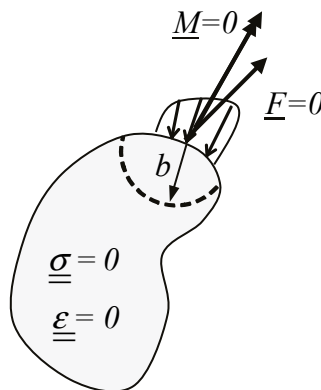


Figura 1.34. Principio de Saint-Venant

Como ilustración de dicho principio, considérese el ensayo plano de tracción. La Figura 1.35 muestra tres formas de aplicar en los extremos de la barra un sistema de fuerzas cuya resultante vale  $F$ , siendo su línea de acción el eje de la barra. En este ejemplo las zonas  $\partial S_i$  en que se aplican las cargas son las áreas extremas  $b \times e$ , mientras que el contorno total de la barra sería la suma de estas áreas extremas más la superficie lateral del prisma que constituye la barra. Si la longitud total de la barra  $L$  es bastante mayor que el ancho  $b$ , es obvio que las secciones extremas son una pequeña parte del contorno total de la barra, por lo que es de aplicación el Principio de Saint Venant.

La dimensión lineal de  $\partial S_i$  es  $b$ , y las  $ZNR$  se obtienen tomando una distancia  $b$  desde  $\partial S_i$ , constituyendo el resto de la barra las  $ZR$ , como se muestra en los esquemas. El principio de Saint Venant establece que en las  $ZR$  los campos de tensiones y deformaciones de los tres problemas son aproximadamente iguales.

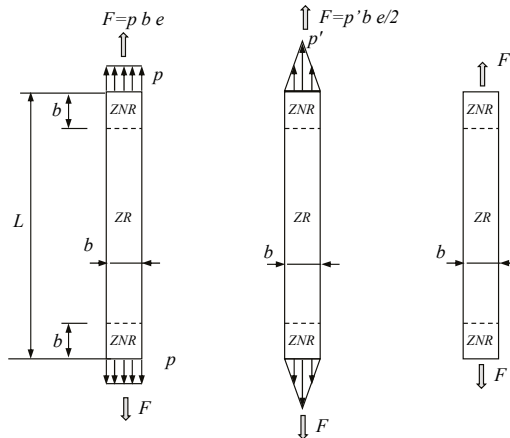


Figura 1.35. Ilustración del principio de Saint-Venant

## 1.8 Estados límite

Uno de los objetivos perseguidos en el análisis estructural es predecir si las acciones a las que una estructura se encuentra sometida ponen en peligro la integridad o funcionalidad de la misma. Cumplir dicho objetivo significa asegurar que el valor admisible de la respuesta del sólido o estructura ( $R_d$ ), que depende entre otros del material y la geometría, es superior al valor de cálculo de las acciones a las que el sólido o estructura se encuentra sometido ( $E_d$ ).

$$E_d \leq R_d \quad (1.76)$$

Dos suelen ser los estados límite que se consideran en el análisis y diseño estructural: el estado límite último y el de servicio. El primero engloba a todas aquellas situaciones que provocan el fallo mientras que en el segundo lo que pone en peligro es la funcionalidad.

Entre los estados límites de servicio que se suelen considerar están los referidos a los desplazamientos que las acciones provocan en la estructura. Normalmente los desplazamientos se suelen limitar en función de las dimensiones del sólido.

En relación al estado límite último, habría que comprobar que cualquier mecanismo de daño al que la estructura o sólido puede verse sometido no provoca el fallo. Los mecanismos de daño pueden ser de muy diferente naturaleza (plastificación, fatiga, creep, inestabilidad, fractura...) y se manifiestan dependiendo del tipo y valor de las cargas actuantes (estáticas, variables, alta temperatura...).

La comprobación de un estado límite último se realiza siempre considerando que las acciones actuantes están mayoradas. Los coeficientes de mayoración dependen de la

naturaleza de la acción característica, entendiendo por acción característica aquella que tiene una probabilidad inferior al 5% de ser superada. La comprobación de los estados de servicio se realiza bajo acciones características.

Uno de los mecanismos de fallo más habituales a considerar es el abandono del comportamiento elástico. El cumplir tal premisa no sólo permite asegurar el comportamiento adecuado del sólido, sino que además valida el modelo de comportamiento elástico que empleamos en el análisis estructural.

Para asegurar tal hecho debemos conocer las tensiones que aparecen en cualquier punto de nuestro sólido y disponer de una determinada función de las mismas, que compararemos con una propiedad del material, en este caso con el límite elástico. Así, si el sólido en estudio sólo está sometido a un estado uniaxial de tensión ( $\sigma_{xx}$ , por ejemplo, con el resto de las componentes igual a cero), la comprobación a realizar se reduce a:

$$\sigma_{xx} \leq \sigma_E \quad (1.77)$$

El problema se complica cuando el estado tensional es multiaxial. Un criterio de plastificación es la generalización de la ecuación (1.77) a estados arbitrarios de tensión, en general tridimensionales: buscamos una función de las componentes de  $\underline{\sigma}$  que nos permita establecer cuándo un punto está en estado elástico o en estado plástico.

Históricamente se plantearon determinadas expresiones para tal fin, no siempre con éxito. Así, Rankine en 1834 propuso que ante un estado multiaxial la plastificación se producía cuando la tensión normal máxima en valor absoluto ( $\sigma_I$  o  $\sigma_{III}$ ) alcanzaba el mismo valor que en el ensayo de tracción ( $\sigma_E$ ). Otras propuestas consistieron en suponer la plastificación asociada a la tensión tangencial máxima (Criterio de Tresca, 1870), o a un valor de la energía almacenada en el sólido (Criterio de Beltrami, 1872). Ensayos que se llevaron a cabo en la primera mitad del siglo XX concluyeron que la plastificación está asociada no a la tensión tangencial máxima sino a la tensión tangencial asociada al plano octaédrico (el plano cuya normal forma ángulos iguales con el sistema principal ( $\underline{n} = (\pm 1/\sqrt{3}, \pm 1/\sqrt{3}, \pm 1/\sqrt{3})$ )). Este criterio, conocido como criterio de Von Mises (1906), establece que la plastificación ocurre cuando se cumple que:

$$\sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 - (\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{xx}\sigma_{zz} + \sigma_{yy}\sigma_{zz}) + 3(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2)} = \sigma_E \quad (1.78)$$

que para un caso plano donde sólo consideraremos  $\sigma_{xx}$  y  $\sigma_{xy}$  (caso que normalmente aparece en barras planas sometidas a cargas contenidas en su plano, como se verá en capítulos posteriores) se reduce a:

$$\sqrt{\sigma_{xx}^2 + 3\sigma_{xy}^2} = \sigma_E \quad (1.79)$$

## 1.9 Ejercicios resueltos

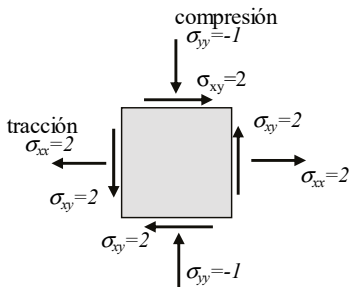
### 1.9.1 Cálculo de tensiones principales

Dado el siguiente estado tensional:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 2x & y \\ y & x-y \end{pmatrix}$$

- Particularizar el estado tensional en el punto  $(x, y)=(1, 2)$  y apoyándose sobre un cuadrado (que representa el punto sin dimensiones), dibujar las componentes de dicho estado tensional.
- Calcular las tensiones principales en el mismo punto  $(x, y)=(1, 2)$ .
- Expresar en el punto  $(x, y)=(1, 2)$  el estado tensional referido a unos ejes  $x'-y'$  que forman  $45^\circ$  con el sistema de referencia  $x-y$ .

- 
- Particularizando el tensor de tensiones en  $(x, y)=(1, 2)$  se obtiene:  $\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$



donde,  $\sigma_{xx}$  al ser positiva representa una tracción en dirección  $x$ , con sentido positivo en la cara de normal positiva y sentido negativo en la cara de normal negativa.  $\sigma_y$  al ser negativa, representa una compresión, con sentido negativo en la cara de normal positiva y sentido positivo en la cara de normal negativa.  $\sigma_{xy}$  es positiva y por tanto representa una acción tangencial que lleva la dirección positiva (en  $y$ ) sobre la cara de normal positiva (en  $x$ ), el sentido contrario (por acción-reacción) sobre la cara de normal negativa y respetando el equilibrio de momentos ( $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$ ).

- Para el cálculo de tensiones principales se emplea el problema de autovalores:  $(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma \underline{\underline{I}}) \underline{n} = 0$ , sistema homogéneo, cuya solución no trivial implica que el determinante de la matriz de coeficientes sea nulo:  $Det(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma \underline{\underline{I}}) = 0$ , particularizado para el punto  $(x, y)=(1, 2)$  queda:

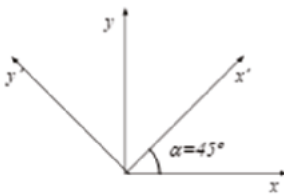
$$\begin{vmatrix} 2-\sigma & 2 \\ 2 & -1-\sigma \end{vmatrix} = 0$$

que deja la siguiente ecuación cuadrática:

$$(2-\sigma)(-1-\sigma) - 4 = 0 \Rightarrow \sigma^2 - \sigma - 6 = 0 \Rightarrow \sigma = 3 \text{ y } \sigma = -2$$

de modo que en un determinado sistema de referencia (estado principal de tensiones), el estado tensional sólo tiene componente normal de tracción ( $\sigma = 3$ ) en una dirección y compresión ( $\sigma = -2$ ) en la dirección perpendicular.

c) El estado tensional en ejes  $x'-y'$  se obtiene con la relación de transformación  $\underline{\sigma}' = \underline{L}^T \underline{\sigma} \underline{L}$ , donde  $\underline{L}$  representa la matriz de giro, que se obtiene, por columnas, proyectando los vectores unitarios del sistema  $x'-y'$  sobre el sistema  $x-y$ .

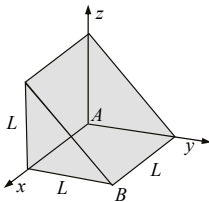


$$\underline{L} = \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix}$$

$$\underline{\sigma}' = \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & \sin 45^\circ \\ -\sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

## 1.9.2 Alargamiento de un segmento

Se conoce la solución de deformaciones del sólido mostrado en la figura referida a los ejes  $xyz$ , siendo  $K$  una constante de pequeño valor. Determinar el alargamiento de la diagonal  $AB$ .



$$\underline{\underline{\epsilon}} = K \begin{pmatrix} 2x & 0 & 0 \\ 0 & 2y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$$

Particularizamos el tensor de deformación para los puntos de la diagonal  $AB$  ( $z=0$   $x=y$ ) y calculamos la deformación normal asociada al plano cuya normal es un vector unitario en la dirección  $AB$  ( $\underline{n}=(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$ ) para ello previamente calculamos el vector deformación ( $\underline{\varepsilon}^n$ ) asociado a dicha normal y posteriormente proyectamos dicho vector sobre la normal.

$$\underline{\varepsilon}^n = K \begin{pmatrix} 2x & 0 & 0 \\ 0 & 2x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} \frac{2x}{\sqrt{2}} \\ \frac{2x}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \varepsilon_n = \underline{n}^T \underline{\varepsilon}^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} K \begin{pmatrix} \frac{2x}{\sqrt{2}} \\ \frac{2x}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = 2Kx$$

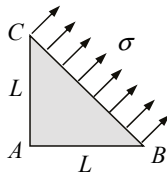
El incremento de longitud de la diagonal  $AB$  vendrá dado por:  $\Delta L_{AB} = \int_A^B \varepsilon_n ds$

Sabiendo que  $x=s/\sqrt{2}$ , siendo  $s$  una coordenada dirigida en la dirección  $AB$ , se obtiene:

$$\Delta L_{AB} = \int_A^B \varepsilon_n ds = \int_0^{\sqrt{2}L} 2Kx ds = \int_0^{\sqrt{2}L} 2K \frac{s}{\sqrt{2}} ds = \sqrt{2}KL^2$$

### 1.9.3 Acciones sobre el contorno

Una laja cuya geometría es la del triángulo rectángulo isósceles mostrado en la Figura, está sometida en la cara  $BC$  a una tensión normal de valor  $\sigma$  y tangencial 0. Se sabe que el material tiene de constantes elásticas  $E$  y  $\nu$ , y que el estado tensional es constante. Determinar las acciones que deben existir en las caras  $AB$  y  $AC$  para que un tensor de tensiones constante en todo punto, tal que provoque que un alargamiento nulo de la línea  $CB$ , sea la solución del problema.



Al ser el estado tensional constante en todo el sólido el tensor de tensiones tendrá la forma:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$$

siendo  $a$ ,  $b$  y  $c$  constantes a determinar. En primer lugar sabemos que sobre la cara  $BC$  hay una tensión normal  $\sigma$  y una tangencial  $\tau$  nula. Aplicando el Lema de Cauchy sobre la cara  $BC$  de normal  $\underline{n}=(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$  obtenemos

$$\underline{t}^n = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+c) \frac{1}{\sqrt{2}} \\ (c+b) \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

La tensión normal será la proyección del vector tensión sobre la normal ( $\sigma = \underline{t}^n \underline{n}$ ):

$$\sigma = \frac{a+b+2c}{2}$$

La proyección del vector tensión sobre el plano al cual está asociado es la tensión tangencial y se obtendría multiplicando el vector tensión por un vector contenido en el plano tangente ( $\underline{s}=(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ ) ( $\tau = \underline{t}^n \underline{s}$ )

$$\tau = \frac{-a+b}{2} = 0$$

De las ecuaciones anteriores deducimos:

$$a=b; a+c=\sigma$$

Para imponer la condición de que la línea  $CB$  no se alargue debemos calcular el campo de deformaciones:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xx} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = \frac{1-\nu}{E} A \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{yy} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = \frac{1-\nu}{E} A \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xy} = \frac{1+\nu}{E} C \end{aligned}$$

La condición de que la línea no se alargue vendrá dada por:

$$\Delta L_{BC} = \int_B^C \varepsilon_n ds = 0$$

siendo  $\varepsilon_n$  la componente normal del vector deformación asociada a un plano cuya normal es la línea  $BC$  ( $\varepsilon_n = \underline{\varepsilon}^n \underline{n}$ ), que ahora será:  $\underline{n}=(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ . Aplicando el Lema de Cauchy



$$\underline{\varepsilon}^n = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{yx} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yx}) \frac{1}{\sqrt{2}} \\ (-\varepsilon_{yx} + \varepsilon_{yy}) \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_n = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \begin{pmatrix} (-\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yx}) \frac{1}{\sqrt{2}} \\ (-\varepsilon_{yx} + \varepsilon_{yy}) \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} - 2\varepsilon_{xy}}{2} = \frac{1-\nu}{E} A - \frac{1+\nu}{E} C$$

Al ser  $\varepsilon_n$  constante la condición de que  $\Delta L_{BC}$  sea cero implica que  $\varepsilon_n$  lo sea, de lo que se deduce:

$$a = \frac{1+\nu}{1-\nu} c$$

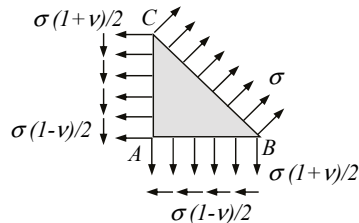
Por tanto, el estado tensional vendrá dado por:

$$a = b = \frac{1+\nu}{2} \sigma \quad ; \quad c = \frac{1-\nu}{2} \sigma$$

Conocido el estado tensional, las acciones en las caras AC y AB se obtienen aplicando el lema de Cauchy:

Cara AC:  $\underline{n} = (-1, 0)$

$$\underline{t}^n = \frac{\sigma}{2} \begin{pmatrix} 1+\nu & 1-\nu \\ 1-\nu & 1+\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{\sigma}{2} \begin{pmatrix} 1+\nu \\ 1-\nu \end{pmatrix}$$



Cara AB:  $\underline{n} = (0, -1)$

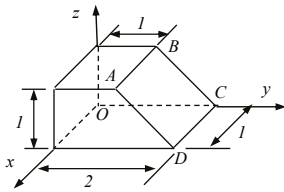
$$\underline{t}^n = \frac{\sigma}{2} \begin{pmatrix} 1+\nu & 1-\nu \\ 1-\nu & 1+\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{\sigma}{2} \begin{pmatrix} 1-\nu \\ 1+\nu \end{pmatrix}$$

### 1.9.4 Caso 3D, cálculo de tensiones principales y vector tensión

El sólido elástico mostrado en la figura está sometido al estado tensional  $\underline{\sigma}$  que se indica.

a) Para el punto A del sólido elástico, representar el estado tensional resultante empleando un cubo sin dimensiones (tanto en las caras vistas como las ocultas).

- b) En el mismo punto  $A$ , calcule sus tensiones principales.  
 c) En la cara  $ABCD$ , determinar el vector tensión.

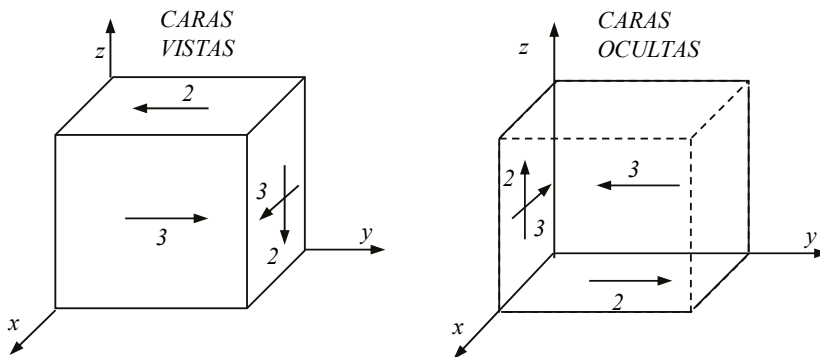


$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 6x - 3y - 3z & 3 & 0 \\ 3 & x - z & -2y \\ 0 & -2y & x - y \end{pmatrix}$$

- a) Para representar el tensor de tensiones empleando un cubo sin dimensiones (que representa un punto del sólido elástico), se particulariza dicho tensor para las coordenadas del punto  $A=(1, 1, 1)$ :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Considerando el carácter simétrico del tensor de tensiones, se representan sus valores en el punto  $A$  tanto en las caras vistas como en las ocultas (usando 2 cubos independientes sin dimensiones):



- b) Las tensiones principales se obtienen como un problema de autovalores:

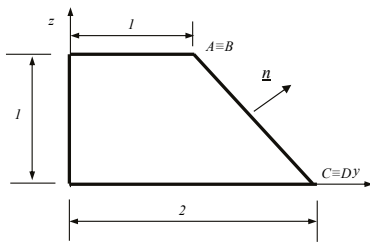
$$|\underline{\underline{\sigma}} - \sigma \underline{\underline{I}}| = 0 \quad ; \quad \begin{vmatrix} -\sigma & 3 & 0 \\ 3 & -\sigma & -2 \\ 0 & -2 & -\sigma \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad -\sigma^3 + 4\sigma + 9\sigma = 0 \Rightarrow \sigma(13\sigma - \sigma^2) = 0$$

De dicha ecuación se obtienen 3 autovalores:  $\sigma = 0$  ;  $\sigma = \pm\sqrt{13}$

Por tanto, las tensiones principales son:  $\sigma_I = \sqrt{13}$  ;  $\sigma_{II} = 0$  ;  $\sigma_{III} = -\sqrt{13}$

c) Cualquier vector tensión se puede calcular usando el Lema de Cauchy, conociendo el tensor de tensiones del sólido elástico y la normal a la que esté asociado el vector tensión en cuestión ( $\underline{t}^n = \underline{\sigma}\underline{n}$ )

Se pide calcular el vector tensión en la cara  $ABCD$  de este sólido elástico. Para ello, se debe particularizar el tensor de tensiones para dicha cara del sólido y obtener la normal a dicha cara.



La cara  $ABCD$  representa una recta en el plano  $y$ , de ecuación  $z = my + n$ ,  $m$  y  $n$  pueden obtenerse usando los puntos  $A=B=(1, 1)$  y  $C=D=(2, 0)$ . Resolviendo dicho sistema de ecuaciones se obtiene que la recta particular buscada es  $z=2-y$ . Por tanto, el tensor de tensiones particularizado para la cara  $ABCD$  es:

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} 6x-6 & 3 & 0 \\ 3 & x+y-2 & -2y \\ 0 & -2y & x-y \end{pmatrix}$$

Al tratarse de un plano inclinado a  $45^\circ$  el vector normal está también orientado a  $45^\circ$  de los ejes  $y$  y  $z$ . Por tanto, el vector unitario normal a la cara  $ABCD$  es:

$$\underline{n}_{ABCD}^T = \left( 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Una vez se dispone de lo necesario el vector tensión en la cara  $ABCD$  quedaría:

$$\underline{t}_{ABCD}^n = \begin{pmatrix} 6x-6 & 3 & 0 \\ 3 & x+y-2 & -2y \\ 0 & -2y & x-y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 \\ x-y-2 \\ x-3y \end{pmatrix}$$

### 1.9.5 Cálculo de los desplazamientos a partir de las deformaciones

Dado el tensor de deformaciones que se indica (donde  $k$  es una constante muy pequeña), calcular el campo de desplazamientos.

$$\underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} kx & kx \\ kx & ky \end{bmatrix}$$

Para obtener el campo de desplazamientos, integramos las deformaciones:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = kx \Rightarrow u_x(x, y) = \frac{kx^2}{2} + f_1(y), \text{ siendo } f_1(y) \text{ una función genérica de } y.$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = ky \Rightarrow u_y(x, y) = \frac{ky^2}{2} + f_2(x), \text{ siendo } f_2(x) \text{ una función genérica de } x.$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = kx$$

sustituyendo las expresiones obtenidas de  $u_x(x, y)$  y  $u_y(x, y)$  en  $\varepsilon_{xy}$ :

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial f_1(y)}{\partial y} + \frac{\partial f_2(x)}{\partial x} \right) = kx$$

separando variables, obtenemos:

$$\frac{\partial f_1(y)}{\partial y} = 2kx - \frac{\partial f_2(x)}{\partial x}$$

La igualdad anterior sólo puede ser válida  $\forall(x, y)$  si ambas expresiones, que dependen exclusivamente de  $x$  y  $y$  respectivamente, son iguales a una constante. De esta forma obtenemos las dos ecuaciones siguientes:

$$\frac{\partial f_1(y)}{\partial y} = 2kx - \frac{\partial f_2(x)}{\partial x} = A \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f_1(y)}{\partial y} = A \Rightarrow f_1(y) = Ay + B \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x} = 2kx - A \Rightarrow f_2(x) = kx^2 - Ax + C \end{cases}$$

De donde obtenemos los desplazamientos:

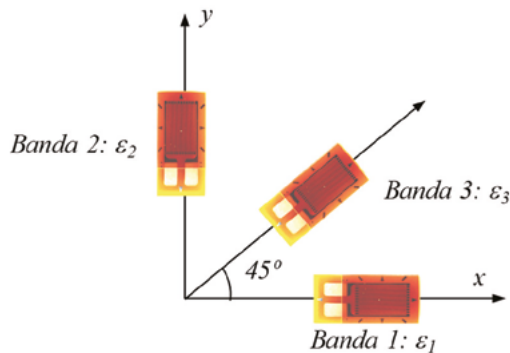
$$u_x(x, y) = \frac{kx^2}{2} + Ay + B$$

$$u_y(x, y) = \frac{ky^2}{2} + Kx^2 - Ax + C$$

Los valores de  $A$ ,  $B$  y  $C$  quedan por determinar a expensas de que se conozcan los desplazamientos ( $u_x$ ,  $u_y$ ) y giro como sólido rígido en algún punto del sólido.

### 1.9.6 Lectura de bandas extensométricas

Sea un sólido sometido a un cierto estado de cargas y sobre el que, en una de sus caras, se colocan tres bandas extensométricas como se indica en la figura. Las bandas arrojan las siguientes lecturas de deformaciones normales (componentes normales del vector deformación):  $\varepsilon_1 = 0$ ,  $\varepsilon_2 = 0$ ,  $\varepsilon_3 = 2K$ . Determinar el tensor de deformaciones y el tensor de tensiones, así como las tensiones principales y la dirección principal I.



El tensor de deformaciones se obtendrá a partir de las medidas de las bandas relacionándolo con las deformaciones normales según la dirección de las bandas:  $\varepsilon_n = (\underline{\varepsilon} \underline{n})^T \underline{n}$

$$\text{Banda 1: } \underline{n}^T = (1, 0) \Rightarrow \varepsilon_1 = \varepsilon_n = \varepsilon_{xx} = 0$$

$$\text{Banda 2: } \underline{n}^T = (0, 1) \Rightarrow \varepsilon_2 = \varepsilon_n = \varepsilon_{yy} = 0$$

$$\text{Banda 3: } \underline{n}^T = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) \Rightarrow \varepsilon_3 = \varepsilon_n = (\varepsilon_{xx} + 2\varepsilon_{xy} + \varepsilon_{yy})/2 = 2K \Rightarrow \varepsilon_{xy} = 2K$$

Así el tensor de deformaciones resulta ser:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} 0 & 2K \\ 2K & 0 \end{pmatrix}$$

Utilizando la ley de comportamiento se obtiene el tensor de tensiones:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{E}{1+\nu} \begin{pmatrix} 0 & 2K \\ 2K & 0 \end{pmatrix}$$

Las tensiones principales se obtienen resolviendo la ecuación:  $|\underline{\underline{\sigma}} - \sigma \underline{\underline{I}}| = 0$ , de este modo:

$$\begin{vmatrix} -\sigma & \frac{E}{1+\nu} 2K \\ \frac{E}{1+\nu} 2K & -\sigma \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \sigma^2 - \left(\frac{E}{1+\nu} 2K\right)^2 = 0 \Rightarrow \sigma = \pm \frac{E}{1+\nu} 2K$$

Ordenando de mayor a menor, las tensiones principales son:

$$\sigma_I = \frac{E}{1+\nu} 2K \quad ; \quad \sigma_{II} = -\frac{E}{1+\nu} 2K$$

La dirección principal I se obtiene de resolver el sistema:  $(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_I \underline{\underline{I}}) \underline{\underline{n}}^I = 0$

$$\begin{pmatrix} -\frac{E}{1+\nu} 2K & \frac{E}{1+\nu} 2K \\ \frac{E}{1+\nu} 2K & -\frac{E}{1+\nu} 2K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x^I \\ n_y^I \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{aligned} \frac{E}{1+\nu} 2K (-n_x^I + n_y^I) &= 0 \\ \frac{E}{1+\nu} 2K (n_x^I - n_y^I) &= 0 \end{aligned}$$

Ambas ecuaciones son iguales, conduciendo a:  $n_x^I = n_y^I$

Para cerrar el problema hay que añadir la ecuación que define que la normal es unitaria:

$$(n_x^I)^2 + (n_y^I)^2 = 1 \Rightarrow 2(n_x^I)^2 = 1 \Rightarrow n_x^I = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Escogiendo, por ejemplo, el valor positivo, se tiene que la dirección principal I viene definida por la normal:

$$\underline{\underline{n}}^I = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

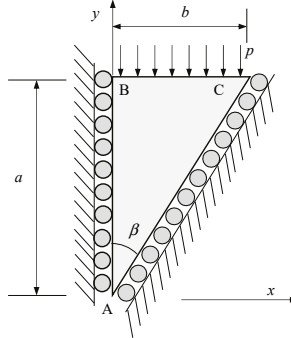
### 1.9.7 Problema termoelástico

Sea un sólido asimilable a una laja delgada (problema plano) de constantes termoelásticas  $E$ ,  $\nu$  y  $\alpha$ , peso específico  $\gamma$ , que se encuentra encajado entre dos paredes que forman un ángulo  $\beta$ . El contacto del sólido con las paredes es sin rozamiento y éste se encuentra sometido además de a su peso propio (actuando en la dirección  $-y$ ) a una presión en su cara superior

de valor  $p$  y a un incremento térmico de valor  $T$ . Compruebe si el tensor de tensiones:

$$\sigma_{xx}=f(x,y) ; \sigma_{xy}=0 ; \sigma_{yy}=g(x,y)$$

puede ser solución del problema.



Para que el tensor de tensiones propuesto sea solución debe satisfacer en primer lugar las ecuaciones de equilibrio interno:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + X_x &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + X_y &= 0 \end{aligned}$$

De la primera ecuación, sabiendo que  $\sigma_{xy}$  es cero y que  $X_x$  también se obtiene:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0 \Rightarrow \sigma_{xx} = f(y)$$

De la segunda ecuación, sabiendo que  $\sigma_{xy}$  es cero y que  $X_y = -\gamma$ , se obtiene:

$$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} - \gamma = \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} - \gamma = 0 \Rightarrow \sigma_{yy} = g(x) + \gamma y$$

Usando la ley termoelástica obtenemos el siguiente campo de deformaciones:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xx} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \alpha T = \frac{1}{E} f(y) - \frac{\nu}{E} (g(x) + \gamma y) + \alpha T \\ \epsilon_{yy} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{yy} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \alpha T = \frac{1}{E} (g(x) + \gamma y) - \frac{\nu}{E} f(y) + \alpha T \\ \epsilon_{xy} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xy} = 0 \end{aligned}$$

Dicho campo de deformaciones debe ser compatible:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \Rightarrow \frac{\partial^2 f(y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f(y)}{\partial y^2} = A \Rightarrow f(y) = \frac{A}{2} y^2 + By + C$$

$$\frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2} = -A \Rightarrow g(x) = -\frac{A}{2} x^2 + Dx + F$$

Por tanto, la estructura del tensor de tensiones, a falta de satisfacer las condiciones de contorno, es:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A}{2} y^2 + By + C & 0 \\ 0 & -\frac{A}{2} x^2 + Dx + F + \gamma y \end{pmatrix}$$

Condiciones de contorno en tensiones:

Cara AB:  $x=0, 0 \leq y \leq a$ ;  $\underline{n}_{AB} = (-1, 0)$ ;  $\underline{T}_{AB} = (t_x, 0)$

$$\underline{T}_{AB} = \underline{\sigma} \underline{n}_{AB} \Rightarrow \begin{pmatrix} t_x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma_{xx} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$t_x = \sigma_{xx}|_{x=0} = \frac{A}{2} y^2 + By + C$$

Cara BC:  $y=a, 0 \leq x \leq b$ ;  $\underline{n}_{BC} = (0, 1)$ ;  $\underline{T}_{BC} = (0, -p)$

$$\underline{T}_{BC} = \underline{\sigma} \underline{n}_{BC} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \end{pmatrix}$$

$$0 = \sigma_{xx}|_{y=a} = \frac{A}{2} a^2 + Ba + C = 0$$

$$-p = \sigma_{yy}|_{y=a} = -\frac{A}{2} x^2 + Dx + F + \gamma y = -p$$

El cumplimiento de la última ecuación para  $0 \leq x \leq b$  implica:

$$A=0; D=0; F=-p - \gamma a$$



Cara AC:  $x=y \operatorname{tg} \beta$ ;  $\underline{n}_{AC}^T = (\cos \beta, -\operatorname{sen} \beta)$ ;  $\tau_{AC} = \underline{t}^T (\underline{\sigma} \underline{n}_{AC})$ , siendo  $\underline{t}^T = (\operatorname{sen} \beta, \cos \beta)$

$$T_{AC} = \underline{\sigma} \underline{n}_{AC} \Rightarrow \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta \\ -\operatorname{sen} \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \cos \beta \\ -\sigma_{yy} \operatorname{sen} \beta \end{pmatrix}$$

$$\tau_{AC} = (\operatorname{sen} \beta, \cos \beta) \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \cos \beta \\ -\sigma_{yy} \operatorname{sen} \beta \end{pmatrix} = (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \cos \beta \operatorname{sen} \beta \Big|_{x=y \operatorname{tg} \beta} = 0 \Rightarrow$$

$$F + \gamma y = By + C$$

De donde se deduce que:

$$F=C; B=\gamma$$

Después de aplicar las condiciones de contorno en tensiones los tensores de tensión y deformación quedan de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p + \gamma(y-a) & 0 \\ 0 & -p + \gamma(y-a) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-\nu}{E}(-p + \gamma(y-a)) + \alpha T & 0 \\ 0 & \frac{1-\nu}{E}(-p + \gamma(y-a)) + \alpha T \end{pmatrix}$$

Para concluir, si la solución tensional es la mostrada solo queda comprobar si se satisfacen o no las condiciones de contorno en desplazamientos. Para ello debemos integrar el campo de deformaciones para obtener el correspondiente campo de desplazamientos:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{1-\nu}{E}(-p + \gamma(y-a)) + \alpha T \Rightarrow u_x = \frac{1-\nu}{E}(-p + \gamma(y-a))x + \alpha T x + m(y)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{1-\nu}{E}(-p + \gamma(y-a)) + \alpha T \Rightarrow u_y = \frac{1-\nu}{E}(-p + \gamma(\frac{y}{2} - a))y + \alpha T y + n(x)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{dm(y)}{dy} + \frac{dn(x)}{dx} = 0 \Rightarrow m(y) = -cy + d \quad ; \quad n(x) = cx + f$$

$$u_x = \frac{1-\nu}{E}(-p + \gamma(y-a))x + \alpha T x - cy + d$$

$$u_y = \frac{1-\nu}{E}(-p + \gamma(\frac{y}{2} - a))y + \alpha T y + cx + f$$

Las condiciones de contorno en desplazamientos son:

Cara  $AB$ :  $x=0$ ,  $u_x=0$  para todo  $y$  y  $a \Rightarrow c=d=0$

Cara  $AC$ :  $x=y \operatorname{tg} \beta$ ,  $u_n = u_x \cos \beta - u_y \operatorname{sen} \beta = 0 \Rightarrow$

$$f = \frac{1-\nu}{E} \gamma \frac{y^2}{2} (1 + \operatorname{tg}^2 \beta)$$

Dado que  $f$  es función de  $y$  cuando debería ser una constante concluimos que los ejes  $x$  e  $y$  no son principales y por tanto el tensor propuesto no es solución al problema al no satisfacer todas las condiciones.

### 1.9.8 Barra sometida a cargas en los extremos

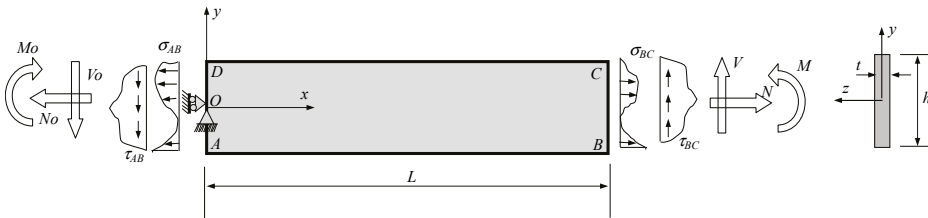
Sea un sólido asimilable a una laja delgada (problema plano) de sección rectangular ( $hxt$ ) de un material isótropo elástico lineal de constantes elásticas  $E$  y  $\nu$ . El sólido está sometido en su cara  $CB$  a unas tensiones normales ( $\sigma_{CB}$ ) y tangenciales ( $\tau_{CB}$ ) cuyas resultantes son  $N$ ,  $V$  y  $M$ , en su cara  $AD$  se encuentra también sometido a unas tensiones normales ( $\sigma_{AD}$ ) y tangenciales ( $\tau_{AD}$ ) de resultantes  $N_0$ ,  $V_0$  y  $M_0$ . El sólido tiene impedido los desplazamientos como sólido rígido, para ello el punto  $O$  tiene impedido los desplazamientos vertical y horizontal así como el giro alrededor del eje  $z$  ( $\partial u_x / \partial y = 0$ ). Se consideran despreciables las fuerza por unidad de volumen.

- ¿Qué valor tienen que tomar  $N_0$ ,  $V_0$  y  $M_0$  para que el sólido esté en equilibrio?
- Comprobar si un tensor de tensiones de la forma:

$$\sigma_{xx} = f(x, y); \sigma_{yy} = 0; \sigma_{xy} = g(x, y)$$

podría satisfacer las condiciones de contorno del problema.

- Encontrar la solución en tensiones y desplazamientos en función de  $N$ ,  $V$  y  $M$ .



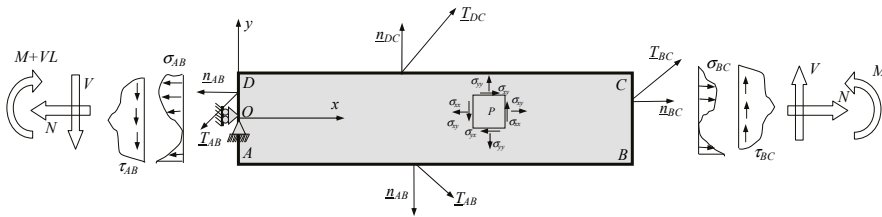
a) Para que el sólido esté en equilibrio debe cumplir que:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N - N_o = 0 \Rightarrow N_o = N$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V - V_o = 0 \Rightarrow V_o = V$$

$$\Sigma M_z \Big|_O = 0 \Rightarrow VL + M - M_o = 0 \Rightarrow M_o = M + VL$$

b) Comprobemos si el tensor propuesto puede satisfacer las condiciones de contorno en tensiones



Cara AB:  $y = -h/2, 0 \leq x \leq L; \underline{n}_{AB} = (0, -1); \underline{T}_{AB} = (0, 0)$

$$\underline{T}_{AB} = \underline{\sigma} \underline{n}_{AB} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma_{xy} \\ -\sigma_{yy} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{xy}(x, -h/2) = 0 \quad ; \quad \sigma_{yy}(x, -h/2) = 0$$

Cara CD:  $y = h/2, 0 \leq x \leq L; \underline{n}_{CD} = (0, 1); \underline{T}_{CD} = (0, 0)$

$$\underline{T}_{CD} = \underline{\sigma} \underline{n}_{CD} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xy} \\ \sigma_{yy} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{xy}(x, h/2) = 0 \quad ; \quad \sigma_{yy}(x, h/2) = 0$$

Cara BC:  $x = L, -h/2 \leq y \leq h/2; \underline{n}_{BC} = (1, 0); \underline{T}_{BC} = (\sigma_{BC}, \tau_{BC})$

$$\underline{T}_{BC} = \underline{\sigma} \underline{n}_{BC} \Rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_{BC} \\ \tau_{BC} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{xx}(L, y) = \sigma_{BC} \quad ; \quad \sigma_{xy}(L, y) = \tau_{BC}$$

La condición de que las resultantes de  $\sigma_{BC}$  y  $\tau_{BC}$  sean  $N$ ,  $V$  y  $M$  se impone como:

$$\begin{aligned}\int_A \sigma_{BC} dA &= N \Rightarrow \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx}(L, y) t dy = N \\ \int_A \tau_{BC} dA &= V \Rightarrow \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy}(L, y) t dy = V \\ \int_A \sigma_{BC} y dA &= -M \Rightarrow \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx}(L, y) y t dy = -M\end{aligned}$$

Cara  $AD$ :  $x=0$ ,  $-h/2 \leq y \leq h/2$ ;  $\underline{n}_{AD} = (-1, 0)$ ;  $\underline{T}_{AD} = (\sigma_{AD}, \tau_{AD})$

$$\begin{aligned}\underline{T}_{AD} = \underline{\sigma} \underline{n}_{AD} &\Rightarrow \begin{pmatrix} -\sigma_{AD} \\ -\tau_{AD} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma_{xx} \\ -\sigma_{xy} \end{pmatrix} \\ \sigma_{xx}(0, y) &= \sigma_{AD} \quad ; \quad \sigma_{xy}(0, y) = \tau_{AD}\end{aligned}$$

La condición de que las resultantes de  $\sigma_{BC}$  y  $\tau_{BC}$  sean  $N$ ,  $V$  y  $M$  se impone como:

$$\begin{aligned}\int_A \sigma_{AD} dA &= N \Rightarrow \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx}(0, y) t dy = N \\ \int_A \tau_{AD} dA &= V \Rightarrow \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy}(0, y) t dy = V \\ \int_A \sigma_{AD} y dA &= -M - VL \Rightarrow \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx}(0, y) y t dy = -M - VL\end{aligned}$$

Si  $\sigma_{yy}$  es cero se satisfacen las condiciones de las caras  $AB$  y  $CD$  en la dirección del eje  $y$ . Para el resto de condiciones al no intervenir  $\sigma_{yy}$  y ser  $\sigma_{xx}$  y  $\sigma_{xy}$  funciones genéricas de  $x$  e  $y$  no habría por ahora ningún argumento que nos hiciera pensar que la solución tomada no es la correcta.

c) Para que el tensor de tensiones sea solución debe satisfacer en primer lugar las ecuaciones de equilibrio interno:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + X_x &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + X_y &= 0\end{aligned}$$

De la segunda ecuación, sabiendo que  $\sigma_{yy}$  es cero y que  $X_y$  también se obtiene:

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} = 0 \Rightarrow \sigma_{xy} = g(y)$$

Sustituyendo en la primera y sabiendo que  $X_x$  es cero se tiene:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + g'(y) = 0 \Rightarrow \sigma_{xx} = f(y) - xg'(y)$$

Estas tensiones provocan un campo de deformaciones que debe ser compatible. Así, si aplicamos la ley de comportamiento obtenemos el siguiente campo de deformaciones:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}) = \frac{1}{E} (f(y) - xg'(y)) \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}) = -\frac{\nu}{E} (f(y) - xg'(y)) \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xy} = \frac{1+\nu}{E} g(y) \end{aligned}$$

La ecuación de compatibilidad en deformaciones es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \Rightarrow \frac{1-\nu}{E} \left( \frac{\partial^2 f(y)}{\partial y^2} - x \frac{\partial^3 g(x)}{\partial x^3} \right) = 0 \\ \frac{\partial^2 f(y)}{\partial y^2} &= 0 \Rightarrow f(y) = ay + b \\ \frac{\partial^3 g(x)}{\partial x^3} &= 0 \Rightarrow g(y) = \frac{c}{2} y^2 + dy + f \end{aligned}$$

Ya tenemos una estructura de tensor que satisface el equilibrio y la compatibilidad, las constantes  $a, b, c, d$  y  $f$  se obtendrán al imponer las condiciones de contorno:

Cara AB:  $y = -h/2, 0 \leq x \leq L$ ;  $\underline{n}_{AB}^T = (0, -1)$ ;  $\underline{T}_{AB}^T = (0, 0)$

$$\sigma_{xy}(x, -h/2) = 0 \Rightarrow g(-h/2) = 0 \Rightarrow \frac{h^2}{8} c - hd + f = 0$$

Cara CD:  $y = h/2, 0 \leq x \leq L$ ;  $\underline{n}_{CD}^T = (0, 1)$ ;  $\underline{T}_{CD}^T = (0, 0)$

$$\sigma_{xy}(x, h/2) = 0 \Rightarrow g(h/2) = 0 \Rightarrow \frac{h^2}{8} c + hd + f = 0$$

De las dos ecuaciones anteriores se obtiene que  $d=0$  y  $f = -h^2 c/8$  quedando  $g(y) = c(y^2 - h^2/4)/2$

Cara  $BC$ :  $x=L$ ,  $-h/2 \leq y \leq h/2$ ;  $\underline{t}_{BC}^T = (1, 0)$ ;  $\underline{T}_{BC}^T = (\sigma_{BC}, \tau_{BC})$

$$\begin{aligned} \int_A \sigma_{BC} dA = N &\Rightarrow \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx}(L, y) t dy = \int_{-h/2}^{h/2} (f(y) - Lg'(y)) t dy = \\ &= \int_{-h/2}^{h/2} (ay + b - Lcy) t dy = bth = N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_A \tau_{BC} dA = V &\Rightarrow \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy}(L, y) t dy = \int_{-h/2}^{h/2} g(y) t dy = \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{1}{2} cy^2 + f\right) t dy = \\ &= \frac{th^3}{24} c - \frac{th^3}{8} c = -\frac{th^3}{12} c = V \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_A \sigma_{BC} y dA = -M &\Rightarrow \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx}(L, y) y t dy = \int_{-h/2}^{h/2} (f(y) - Lg'(y)) y t dy = \\ &= \int_{-h/2}^{h/2} (ay^2 + by - Lcy^2) t dy = \frac{th^3}{12} (a - Lc) = -M \end{aligned}$$

De las tres ecuaciones anteriores obtenemos:

$$b = \frac{N}{th} = \frac{N}{A}; c = -\frac{12}{th^3} V = -\frac{V}{I_{zz}}; a = -\frac{M}{I_{zz}} + Lc = -\frac{M + VL}{I_{zz}}$$

siendo  $A (=th)$  el área de la sección,  $I_{zz}$  el momento de inercia alrededor del eje  $z (=th^3/12)$ .

Se puede comprobar que con los valores obtenidos de las constantes las condiciones en la cara  $AD$  se cumplen. Así, el tensor de tensiones que satisface todas las condiciones, y por tanto es la solución al problema, viene dado por:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = f(y) - xg'(y) &= ay + b - x(cy + f) = \frac{N}{A} - \frac{M + V(L - x)}{I_{zz}} y \\ \sigma_{xy} = g(y) &= \frac{1}{2} cy^2 + f = \frac{c}{2} \left( y^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2 \right) = -\frac{V}{2I_{zz}} \left( y^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2 \right) \end{aligned}$$

Conviene notar que para que la solución anterior sea la solución al problema las tensiones que estarían aplicadas en las caras  $BC$  y  $AD$  deberían ser las leyes lineales y cuadráticas dadas por las ecuaciones anteriores. Si no fuese así, con estas leyes, lo único que se podría afirmar es que la solución sería la correcta, por el Principio de Saint-Venant sólo a una distancia del orden de  $h$  de las caras  $AD$  y  $BC$ . En los capítulos posteriores donde se tratará el modelo de barra, la premisa básica será trabajar con la resultante del estado tensional y, como se verá, las hipótesis que se adoptarán permiten obtener la solución cuasi-exacta.

Para obtener el campo de desplazamientos integramos la relación  $\varepsilon$ - $u$ :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{1}{E} \left( \frac{N}{A} - \frac{M + V(L-x)}{I_{zz}} \right) y \Rightarrow u_x = \int \frac{1}{E} \left( \frac{N}{A} - \frac{M + V(L-x)}{I_{zz}} \right) y dx + f(y)$$

$$u_x = \frac{1}{E} \left( \frac{N}{A} x - \frac{M + V(L-x)}{I_{zz}} yx \right) + f(y)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = -\frac{\nu}{E} \left( \frac{N}{A} - \frac{M + V(L-x)}{I_{zz}} \right) y \Rightarrow u_y = \int -\frac{\nu}{E} \left( \frac{N}{A} - \frac{M + V(L-x)}{I_{zz}} \right) y dy + g(x)$$

$$u_y = -\frac{\nu}{E} \left( \frac{N}{A} y - \frac{M + V(L-x)}{I_{zz}} \frac{y^2}{2} \right) + g(x)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = -\frac{1+\nu}{E} \left( y^2 - \left( \frac{h}{2} \right)^2 \right) \frac{V}{I_{zz}} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} \int \varepsilon_{xx} dx + \frac{\partial}{\partial x} \int \varepsilon_{yy} dy + \frac{df(y)}{dy} + \frac{dg(x)}{dx} = \gamma_{xy}$$

$$\frac{df(y)}{dy} + \frac{dg(x)}{dx} = \left( \left( 1 + \frac{\nu}{2} \right) y^2 + \left( 1 + \nu \right) \left( \frac{h}{2} \right)^2 \right) \frac{V}{EI_{zz}} + \frac{1}{E} \frac{M + V(L - \frac{x}{2})}{I_{zz}} x$$

De la tercera ecuación se obtienen  $f(y)$  y  $g(x)$ :

$$\frac{df(y)}{dy} = \left( \left( 1 + \frac{\nu}{2} \right) y^2 + \left( 1 + \nu \right) \left( \frac{h}{2} \right)^2 \right) \frac{V}{EI_{zz}} \Rightarrow f(y) = \left( \left( 1 + \frac{\nu}{2} \right) \frac{y^3}{3} + \left( 1 + \nu \right) \left( \frac{h}{2} \right)^2 y \right) \frac{V}{EI_{zz}} + Ay + B$$

$$\frac{dg(x)}{dx} = \frac{1}{E} \frac{M + V(L - \frac{x}{2})}{I_{zz}} x \Rightarrow g(x) = \frac{1}{E} \frac{Mx^2 + V(Lx^2 - \frac{x^3}{3})}{2I_{zz}} - Ax + C$$

siendo  $A$ ,  $B$  y  $C$  las constantes asociadas a los movimientos como sólido rígido. El campo desplazamientos resulta:

$$u_x = \frac{1}{E} \left( \frac{N}{A} x - \frac{M + V(L - \frac{x}{2})}{I_{zz}} yx \right) + \left( \left( 1 + \frac{\nu}{2} \right) \frac{y^3}{3} + \left( 1 + \nu \right) \left( \frac{h}{2} \right)^2 y \right) \frac{V}{EI_{zz}} + Ay + B$$

$$u_y = -\frac{\nu}{E} \left( \frac{N}{A} y - \frac{M + V(L-x)}{I_{zz}} \frac{y^2}{2} \right) + \frac{1}{E} \frac{Mx^2 + V(Lx^2 - \frac{x^3}{3})}{2I_{zz}} - Ax + C$$

Las constantes  $A$ ,  $B$  y  $C$  se calculan imponiendo

Para  $x=0$  y  $y=0$ ,  $u_x=u_y=0$  y  $\partial u_x/\partial y=0 \Rightarrow B=0$  ;  $C=0$  y para  $y=0$  y  $x=L$   $u_y=0 \Rightarrow$

$$A = -\frac{1+\nu}{EI_{zz}} \left(\frac{h}{2}\right)^2 V$$

Finalmente el campo de desplazamientos queda:

$$u_x = \frac{1}{E} \left( \frac{N}{A} x - \frac{M + V(L - \frac{x}{2})}{I_{zz}} yx - (2+\nu) \frac{y^3}{6} \frac{V}{I_{zz}} \right)$$

$$u_y = \frac{1}{E} \left( -\frac{yV}{A} N + \frac{(x^2 + y^2)}{2I_{zz}} M + \frac{\left( 2(1+\nu) \left(\frac{h}{2}\right)^2 x + \nu(L-x)y^2 - \frac{x^3}{3} + Lx^2 \right)}{2I_{zz}} V \right)$$



## BIBLIOGRAFÍA

- Bazant Z.P., Cedolin L.** *Stability Of Structures: Elastic, Inelastic, Fracture And Damage Theories*. World Scientific Publishing Co. Ltd., 2 Ed (2003)
- Belluzi O.** *Ciencia de la Construcción*. 4 Tomos. Aguilar. 4 Tomos (1976)
- Benito C.** *Nociones de Cálculo Plástico* Litoprint (1975)
- Cañas J., Picón R., París F.** *Problemas de Elasticidad*. ETSII de Sevilla (1987)
- Chai H Yoo, Sung Lee.** *Stability of Structures: Principles and Applications*. Butterworth-Heinemann, (2011)
- Chajes A.** *Structural Analysis*. Prentice Hall (1990)
- Courbon J.** *Tratado de Resistencia de Materiales*. Aguilar. 2 Tomos (1968)
- Crandall S. H., Dahl N. C.** *Introducción a la Mecánica de Sólidos*. Ed. Del Castillo (1966)
- Duc J., Bellet D.** *Mecanique Des Solides Reels: Elasticité*. Cepadues-Edition (1977)
- Dugdale D. S., Ruiz C.** *Elasticidad para Técnicos*. Reverté (1973)
- Feodosiev V.I.** *Résistance des matériaux: problèmes et questions choisis*. Ed. Mir (1977)
- Feodosiev V.I.** *Resistencia de Materiales*. Ed. Mir (1980)
- Fung Y. C.** *Foundations of Solid Mechanics*. Prentice-Hall (1965)
- Germain P.** *Mecanique des Milieux Continus*. Masson Et Cie (1973)
- Hibbeler R.C.** *Mecánica de Materiales*. Prentice Hall (1998)
- Lekhnitskii , S. G.** *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body*. Ed Mir (1977)
- Malvern L. E.** *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice Hall (1969)
- Massonnet C., Save M.** *Cálculo plástico de las construcciones*. Ed. Montaner y Simon (1966)
- Miroliubov I. et al.** *Problemas de Resistencia de Materiales*. Ed. Mir (1975)
- Neal B.G.** *The Plastic Methods os Structural Analysis*. Ed. Chpaman and Hall (1977)
- Oden S.T., Ripperger E.A.** *Mechanics of Elastic Structures*. McGraw-Hill (1981)
- Ortiz Berrocal L.** *Elasticidad*. Litoprint (1976)

- Ortiz Berrocal L.** *Resistencia de Materiales*. Mc Graw Hill (1990)
- París F.** *Teoría de la Elasticidad*. GERM, 2Ed. Sevilla (1998)
- Picón R.** *Resistencia de Materiales*. E.T.S.I.I. Sevilla (2000)
- Pisarenko G.S., Yâkovlev A.P., Matvéev V.V.** *Manual De Resistencia De Materiales*. Ed. Mir (1979)
- Rui-Wamba J.** *Aforismos Estructurales*. Fundación Esteyco (1998)
- Sokolnikoff I. S.** *Mathematical Theory of Elasticity*. Mc Graw-Hill (1956)
- Timoshenko S.** *Resistencia de Materiales*. Espasa-Calpe . 2 Tomos (1944)
- Timoshenko S., Goodier J. N.** *Teoría de la Elasticidad*. Urmo (1951)
- Timoshenko S., Young D.M.** *Elementos de Resistencia de Materiales*. Montaner y Simon (1965)
- Timoshenko S., Gere, J.M.** *Resistencia de Materiales*. Ed. Thomson, 5 Ed (2002)
- Timoshenko S., Gere J.M.** *Theory of Elastic Stability*. Dover Publications (2009)
- Torroja E.** *Razón y ser de los tipos estructurales*, CSIC (2007 3era Edición)
- Vicente Ortiz A., Hernandez Rubio J.A.** *Cálculo de Estructuras. Métodos Plásticos*. ED-S.P.A. (1973)

## BIOGRAFÍA

**José Cañas Delgado** nació en Arcos de la Frontera (Cádiz), cursó los estudios de Ingeniería Industrial (especialidad Mecánica) en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de la Universidad de Sevilla, obteniendo la titulación en 1982 y el doctorado en 1986. Desde 1995 es catedrático de universidad en el área de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras. Ha impartido docencia durante más de 40 años en la asignatura de Elasticidad y Resistencia de Materiales. Es autor de numerosas publicaciones, tanto nacionales como internacionales. Ha realizado un gran número de aportaciones en transferencia de tecnología entre las que destaca la creación de la *spin-off* TEAMS en el año 2006.

**Enrique Graciani Díaz** nació en Sevilla. Catedrático de universidad desde 2018, obtuvo el título de Ingeniero Industrial (especialidad Mecánica) en 1995 y el de doctor en 2006, ambos en la Universidad de Sevilla. Desde 1996 desarrolla su actividad académica en la Escuela Técnica Superior de Ingeniería de la Universidad de Sevilla, dentro del grupo de Elasticidad y Resistencia de Materiales, formando parte del Departamento de Mecánica de Medios Continuos e Ingeniería del Terreno hasta su división y del Departamento de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras desde entonces, del que fue director entre 2017 y 2021. Ha impartido docencia de Resistencia de Materiales dentro de ocho planes de estudio de Ingeniería de la Universidad de Sevilla.

**Elena Correa Montoto** nació en Sevilla. Cursó los estudios de Ingeniería Industrial (especialidad Mecánica) en la Escuela Técnica Superior de Ingeniería de la Universidad de Sevilla, en la que obtuvo también el grado de doctora. Es catedrática de universidad desde 2023. Su carrera docente e investigadora se ha desarrollado en el grupo de Elasticidad y Resistencia de Materiales del Departamento de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras. Desde el año 2004 y de manera ininterrumpida ha impartido docencia de Elasticidad y Resistencia de Materiales en múltiples titulaciones de Ingeniería, con especial énfasis en la rama Industrial.

**Alberto Barroso Caro** nació en Sevilla. Es ingeniero industrial (especialidad Mecánica), doctor por la Universidad de Sevilla y catedrático de universidad desde el año 2022. Su actividad docente e investigadora la ha desarrollado en el grupo de Elasticidad y Resistencia de Materiales de la Escuela Técnica Superior de Ingeniería de la Universidad de Sevilla. Ha impartido asignaturas de Elasticidad y Resistencia de Materiales, relacionadas con el contenido de este libro, de forma ininterrumpida durante los últimos 20 años.

**Jesús Justo Estebanz** es ingeniero aeronáutico, especializado en aeronaves y vehículos espaciales, y doctor por la Universidad de Sevilla. Vinculado al Departamento de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras de la Universidad de Sevilla desde el año 2007, forma parte del grupo de Elasticidad y Resistencia de Materiales. Es profesor titular desde 2021.

# ELASTICIDAD Y RESISTENCIA DE MATERIALES

Del punto a la estructura

*Elasticidad y resistencia de materiales. Del punto a la estructura* es una obra pensada para el aprendizaje de la asignatura del mismo nombre que se imparte en el grado de Ingeniería de Tecnologías Industriales de la Escuela Técnica Superior de Ingeniería de la Universidad de Sevilla. Se trata de un texto de referencia para los que se inician en el estudio de estructuras de barras, que viene precedido de una breve introducción a la mecánica del sólido deformable. El libro, además de diversos capítulos dedicados a estudiar el efecto que las diversas solicitaciones tienen sobre el comportamiento estructural de la barra o de la estructura, incluye al final de cada capítulo una colección de problemas resueltos sobre la temática abordada. Asimismo, se incluye una serie de anexos que amplía los conocimientos sobre diferentes aspectos relacionados con las estructuras de barras.