PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA EN INGENIERÍA

Editorial Universidad de Sevilla

Paz Pérez González (coordinadora)
José Manuel Framiñán Torres
Gabriel Villa Caro
Victor Fernádez-Viagas Escudero

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA EN INGENIERÍA

Editorial Universidad de Sevilla

Escuela Técnica Superior de
INGENIERÍA DE SEVILLA

SEVILLA 2022

Colección: Monografías de la Escuela Técnica Superior de Ingeniería
de la Universidad de Sevilla

Núm.: 22

C/ Porvenir, 27 - 41013 Sevilla.
Tlfs.: 954 487 447; 954 487 451; Fax: 954 487 443
Correo electrónico: eus4@us.es
Web: https://editorial.us.es

Impreso en papel ecológico
Impreso en España-Printed in Spain

ISBN 978-84-472-2227-8
Depósito Legal: SE 1601-2022

Diseño de interior (LaTeX): F. Javier Payán Somet 2014.
Maquetación de interior (LaTeX): Paz Pérez González y José M. Framiñán Torres
Ilustraciones: Paz Pérez González
Diseño de cubierta: Santi García Hernández
Realización de cubierta: referencias.maquetacion@gmail.com

Impresión: Podiprint

Introducción y Objetivos

Con este libro se pretende ofrecer, tanto a alumnos como a profesores, un material de consulta y guía para cursos de Estadística y Probabilidad. Los contenidos que se muestran juegan un papel fundamental en la modelización, resolución de problemas y análisis de datos en el ámbito de la Ingeniería. No es lo mismo comprender la forma en la que se resuelve un problema que ser capaces de abordarlo: en Estadística lo primero puede llevarse a cabo con conocimientos relativamente básicos de matemáticas, mientras que lo segundo implica una profunda comprensión de los contenidos teóricos, capacidad de análisis e intuición. Estas habilidades se ejercitan mediante la comprensión de las herramientas matemáticas de las que se dispone para plantear los problemas, siendo este el objetivo principal del libro.

El libro es el resultado del material generado por los autores para las asignaturas de Estadística e Investigación Operativa que se imparten en diferentes grados de la Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Sevilla, fundamentalmente en el Grado de Ingeniería en Tecnologías Industriales y en el Grado en Ingeniería Aeroespacial, durante los últimos diez años.

La idea fundamental del libro es facilitar el estudio de la materia a estudiantes de primeros cursos de universidad, principalmente de Ingeniería, con rigurosidad matemática, pero evitando una complejidad alta, de forma que los contenidos sean fácilmente entendibles por estudiantes con conocimientos de matemáticas básicos. Los contenidos del libro son:

- Capítulos del 1 al 7
  - Contenidos teóricos estructurados en secciones:
    - Definiciones de conceptos, para introducir los elementos clave la materia.
    - Resultados principales (teoremas, propiedades, etc) con demostraciones matemáticas, realizadas de forma detallada para entender todos los pasos.
    - Ejemplos ilustrativos, que ayuden a comprender tanto los conceptos definidos como a poner en práctica los resultados.
  - Sección de ejercicios teóricos, con la solución de los mismos de forma detallada, que ayudan a consolidar los conceptos vistos.

  - Sección de problemas resueltos paso a paso con gran nivel de detalle, muchos de ellos de diferentes formas –aunque seguramente hay formas adicionales de abordarlos–, para que el estudiante compruebe los diferentes enfoques. Estos problemas están clasificados con asteriscos (*, **, ***, ****, *****) indicando el nivel de dificultad. Este enfoque está pensado para evitar el entrenamiento por estudio del método de resolución, sino que se recomienda al estudiante primero abordar los problemas de forma autónoma (seleccionándolo por el número de asteriscos dependiendo de sus capacidades) y, en todo caso, emplear la solución para rectificar y/o verificar el enfoque que se ha dado.
  - Algunos capítulos contienen una sección de material adicional, en el que se proponen temas de interés, curiosidades, problemas especiales, conceptos avanzados, etc.

- El Capítulo 8 es una colección de problemas adicionales planteados en los exámenes. Estos problemas pueden ser clasificados casi todos con cinco asteriscos, por lo que no se incluyen los asteriscos en dicho capítulo.
- El Apéndice A contiene un complemento de matemáticas con algunos resultados básicos de análisis matemático usados en algunas demostraciones de los capítulos del 1 al 7.
- El Apéndice B incluye un resumen en tablas de las diferentes distribuciones discretas y continuas con sus características básicas
- El Apéndice C resume los intervalos de confianza para los distintos parámetros.
- Finalmente. el Apéndice D muestra las tablas de la normal, y de las distribuciones relacionas con la normal (t-student, chi-cuadrado y $\mathscr{F}$ de Snedecor).

A pesar de la estructuración por capítulos, los contenidos son incrementales y, por lo general, no es factible abordar un capítulo aislado sin tener al menos los conocimientos teóricos de los capítulos anteriores. Pensamos que este enfoque incremental es importante porque ayuda a sedimentar conocimientos, y a obtener una visión general de la materia como herramienta para abordar fenómenos de naturaleza aleatoria.

Índice

1 Introducción a la Teoría de la Probabilidad

1.1 Introducción

La Teoría de la Probabilidad es una rama de las Matemáticas que estudia los *fenómenos aleatorios*, que son aquellos fenómenos en los que su repetición bajo idénticas condiciones de partida no necesariamente produce el mismo resultado. Desde un punto de vista filosófico, no está claro si este hecho se debe a que no se tiene un conocimiento exhaustivo de todos los factores que intervienen en el fenómeno, o bien a una naturaleza *intrínsecamente* aleatoria del mismo.

Ejemplo 1.1.1.
Al tirar un dado no es posible predecir el resultado. ¿Esto se debe a un conocimiento insuficiente de los factores del fenómeno (ángulo de lanzamiento, fuerza, distancia al suelo, velocidad del viento,...), o incluso conociéndolos en detalle y pudiéndolos reproducir el resultado ¿sería distinto cada vez? ¿Qué factores habría que tener en cuenta? ¿Sería posible reproducir esos factores? ¿Sería viable desde un punto de vista técnico? ¿Y desde un punto de vista económico?

En cualquier caso, está claro que la complejidad de los sistemas diseñados y operados por los ingenieros hace que no sea posible replicar todos y cada uno de los factores que podrían influir en el resultado. Por ello, en la ingeniería abundan los fenómenos aleatorios.

Ejemplo 1.1.2.
Veamos algunos ejemplos de fenómenos aleatorios en la ingeniería:

- Un mismo aparato de medida realiza mediciones sucesivas ligeramente distintas. Así, un termómetro que mide la temperatura de un cuerpo registra pequeñas diferencias cuando ese cuerpo se vuelve a medir con el mismo termómetro.
- Dos piezas idénticas fabricadas en un mismo molde no miden exactamente lo mismo, existiendo pequeñas diferencias (tolerancia de fabricación).
- El mismo motor no tarda siempre el mismo tiempo en arrancar, incluso a igualdad de determinados factores controlables (temperatura, combustible, etc.).

No obstante, los fenómenos en la ingeniería no suelen ser caóticos, por lo que el hecho de que no se pueda tener certeza de su resultado no implica que no podamos estimar cuál serían los resultados probables, o el patrón de resultados que se registraría habitualmente.

Ejemplo 1.1.3.
De los ejemplos anteriores se tiene:

- Tras realizar varias medidas de temperatura de un cuerpo, se obtiene que oscila entre los 52.3 °C y los 52.7 °C.
- Tras fabricar en el mismo molde 100 piezas, se obtiene un tamaño medio de 10.2 cms.
- Tras arrancar 50 veces el mismo motor en las mismas condiciones de factores controlables, se observa que en el 50 % de los casos tarda menos de 1 segundo.

La comprensión de estos patrones es fundamental para los ingenieros, ya que permiten determinar las condiciones bajo las que deben diseñarse y operarse determinados sistemas ingenieriles.

Ejemplo 1.1.4.
Supongamos que se plantean las siguientes cuestiones:

- Si hay niebla espesa o nieve en un aeropuerto, es preciso desviar vuelos y correr con las indemnizaciones a los pasajeros. ¿Compensaría adquirir un radar antiniebla en el aeropuerto de Sevilla para que los aviones puedan despegar y aterrizar con niebla espesa? ¿Y un sistema para que los aviones operen en condiciones de nieve? ¿Y en Estocolmo?
- Sabiendo que de cada 100.000 circuitos que se producen en una determinada fábrica, uno sale defectuoso, ¿sería preciso duplicar (o triplicar) estos circuitos para que un ordenador no falle? ¿Y con un defectuoso cada 1.000.000.000 circuitos?
- El Servicio Técnico de Apple no repara los iPhones en garantía, sino que le da uno nuevo al cliente. ¿Cuánto cuesta esta política de garantía? ¿Qué porcentaje máximo de iPhones pueden tener defectos de fabricación para que esta política sea rentable?

- Cada vez que un usuario accede a un servidor Web se abre un canal de comunicación con el usuario. Si muchos usuarios intentan acceder al servidor a la vez, saturan los canales de comunicación y hacen que su respuesta sea cada vez más lenta, pudiendo hacer que el servidor colapse. Una forma de evitarlo es montar servidores en paralelo para aumentar el número de canales de comunicación disponibles. ¿Cuántos servidores en paralelo debe tener la plataforma de Enseñanza Virtual? ¿Y Facebook?
- Algunas compañías aéreas venden más billetes que asientos (*overbooking*), ya que suele suceder que hay viajeros que cancelan sus vuelos una vez comprado el billete. Esta práctica les permite vender más billetes, aunque corren el riesgo de tener que indemnizar a los pasajeros sin asiento si no hay cancelaciones. ¿Esta práctica es beneficiosa para la compañía? ¿Bajo qué condiciones? ¿Cuántos asientos de más debería vender?

Para comprender y estimar los resultados posibles de los fenómenos aleatorios es preciso primero definir rigurosamente una serie de conceptos básicos, como los de experimento aleatorio, sucesos, y espacio muestral, y definir formalmente el concepto de probabilidad. Como se verá de forma rigurosa, la probabilidad es una medida (valor numérico) de la frecuencia de que tenga lugar un suceso. Se estudiarán distintas propiedades de la probabilidad de varios sucesos, en particular cuando hay algún tipo de relación entre los mismos. Para acabar el capítulo, veremos cómo asignar valores a las probabilidades de los fenómenos en un caso sencillo: cuando todos los resultados posibles del experimento son finitos e igualmente probables. La asignación de valores a las probabilidades de los resultados posibles nos permitirá (en este caso) fijar las condiciones de diseño y de operación de los sistemas.

1.2 Conceptos Básicos

1.2.1 Experimento aleatorio, espacio muestral y suceso

Definición 1.2.1 (Experimento aleatorio) Un **experimento aleatorio** es un experimento en el que:

1. Todos los resultados posibles del experimento se conocen de antemano.
2. La realización del experimento produce un resultado no predecible de antemano.
3. El experimento puede ser repetido bajo condiciones idénticas.

Al resultado de un experimento aleatorio lo denotaremos por ω. Al conjunto de todos los resultados posibles del experimento lo denotaremos por Ω.

Ejemplo 1.2.1.
Algunos ejemplos de experimentos aleatorios son:

- “Lanzar un dado y observar el número obtenido". $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. Ω es numerable. En este caso, los resultados son $w_i = i$, con $i = 1 \dots 6$.
- “Contar el número de lanzamientos de una moneda hasta obtener cara". $\Omega = \{1,2,3,\dots\}$ es numerable. En este caso, los resultados son $w_i = i$, con $i = 1 \dots \infty$.
- “Velocidad exacta del coche de Fernando Alonso al cruzar la línea de meta en cada vuelta". $\Omega = (0,350]$ es no numerable. En este caso es más problemático definir los resultados. En realidad, al realizar el experimento no será posible saber el resultado exacto, sino que lo que se obtendrá es un valor aproximado, debido a la precisión del aparato de medida. De esta forma, lo que se tiene es un intervalo o rango de valores. Así, si el velocímetro tiene una precisión de dos decimales de km/h. y se obtiene el valor 238.95 en realidad se ha obtenido el intervalo $[238.95, 238.96)$.

Definición 1.2.2 (Espacio muestral) Dado un experimento aleatorio, definimos **espacio muestral** E como la colección de todos los subconjuntos que se pueden formar con elementos de Ω. A cada elemento $S \in E$ se le denomina **suceso**.
Si $S = \{\omega\}$, entonces se dice que S es un **suceso elemental**.

Ejemplo 1.2.2.
Algunos ejemplos de espacios muestrales:

- Si el experimento consiste en tirar una moneda al aire, tenemos que $\Omega = \{C,X\}$. En consecuencia, $E = \{\varnothing,\{C\},\{X\},\{C,X\}\} = \{\varnothing,\{C\},\{X\},\Omega\}$. Como se ve, hay cuatro sucesos:
  - $S_0 = \varnothing$, que denota el hecho de que no salga cara ni salga cruz en el experimento,
  - $S_1 = \{C\}$, que denota el que salga cara,
  - $S_2 = \{X\}$, que denota el que salga cruz, y
  - $S_3 = \{C,X\} = \{C\} \cup \{X\}$, que denota el hecho que salga cara o salga cruz.

  Nótese que S_1 y S_2 son sucesos elementales, mientras que S_0 y S_3 no. El que S_0 no pueda efectivamente ocurrir no es óbice para que quede definido como suceso.
- Si el experimento consiste en tirar dos monedas al aire, tenemos que $\Omega = \{CC,CX,XC,XX\}$. En consecuencia:

  $$E = \{\varnothing,\{CC\},\{CX\},\{XC\},\{XX\},\{CC,XX\},\{CC,CX\},\{CC,XC\},\dots,\Omega\}$$

- Si el experimento consiste en lanzar un dado, E incluye sucesos no elementales como:
  - $S_1 = \{\text{obtener un número par}\} = \{2,4,6\}$,

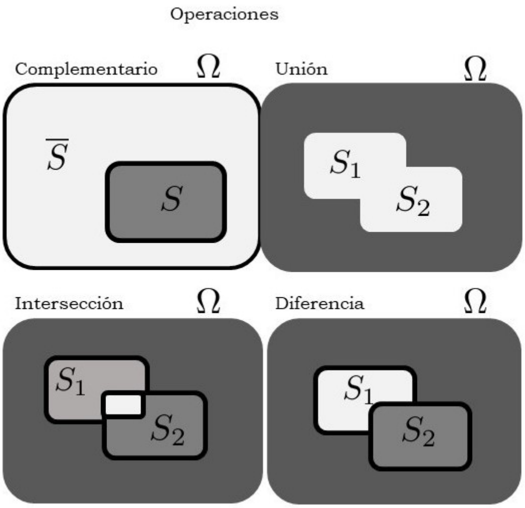

Figura 1.1 Operaciones entre sucesos.

- $S_2 = \{$obtener un número mayor que $4\} = \{5,6\}$.
- $S_3 = \{$obtener un número que acabe en $s\} = \{2,3,6\}$

- Si el experimento consiste en obtener la velocidad del coche de Fernando Alonso, no es posible determinar los sucesos elementales, sino sucesos no elementales consistentes en intervalos de velocidad. En este caso, se ve que no es posible definir E de forma exhaustiva.
  - $S_1 = \{$ La velocidad del coche está en el intervalo $[238.95, 238.96)\}$

Nótese que si Ω es finito, entonces E es finito, y viceversa.

1.2.2 Operaciones con sucesos

1. Intersección de sucesos. $S = S_1 \cap S_2$ es un suceso, y es la ocurrencia de S_1 y S_2. Ver Figura 1.1.

   Nota: $\Omega \cap \varnothing = \varnothing$

2. Unión de sucesos. $S = S_1 \cup S_2$ es un suceso, y es la ocurrencia de S_1 ó S_2. Ver Figura 1.1.

   Nota: $\Omega \cup \varnothing = \Omega$

3. Suceso complementario. $\overline{S}$ es un suceso, y es la no ocurrencia de S. $S \cap \overline{S} = \varnothing$ y $S \cup \overline{S} = \Omega$. Ver Figura 1.1.

   Nota: $\overline{\Omega} = \varnothing$ y $\overline{\varnothing} = \Omega$

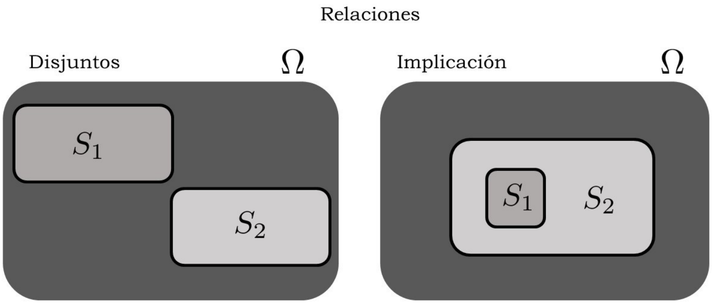

Figura 1.2 Relaciones entre sucesos.

4. Diferencia entre sucesos. $S = S_1 - S_2 = S_1 \cap \overline{S_2}$. Es la ocurrencia de S_1 y no de S_2. Ver Figura 1.1.

Ejemplo 1.2.3.
Sea el experimento de lanzar el dado. Se tiene que $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. Definimos los siguientes sucesos:

- $S_1 = \{\text{obtener } 1\} = \{1\}$
- $S_2 = \{\text{obtener par}\} = \{2,4,6\}$
- $S_3 = \{\text{obtener mayor que } 3\} = \{4,5,6\}$

Se tiene que

- $\overline{S_1} = \{\text{obtener distinto de } 1\} = \{2,3,4,5,6\}$
- $S_1 \bigcup S_2 = \{1,2,4,6\}$
- $S_2 \bigcap S_3 = \{4,6\}$
- $S_2 - S_3 = \{2\}$

1.2.3 Relaciones entre sucesos

Definición 1.2.3 (Sucesos disjuntos) Dada una colección numerable de sucesos $\{S_k\}_{k \in K}$, con $K \subseteq \mathbb{N}$ diremos que son **mutuamente excluyentes** o **disjuntos** si $S_k \cap S_l = \varnothing$, $\forall k \neq l$, $k,l \in K$.

En particular, dos sucesos S_1 y S_2 son mutuamente excluyentes si se verifica que $S_1 \cap S_2 = \varnothing$. Ver Figura 1.2.

Definición 1.2.4 (Implicación de sucesos) Un suceso S_1 **implica** otro suceso S_2 cuando $S_1 \subseteq S_2$

Como consecuencia de lo anterior, si S_1 implica S_2, entonces $S_1 \cap S_2 = S_1$. Ver Figura 1.2.

Definición 1.2.5 (Sucesos exhaustivos) Dada una colección numerable de sucesos $\{S_k\}_{k \in K}$, con $K \subseteq \mathbb{N}$ diremos que son **exhaustivos** si $\bigcup_{k \in K} S_k = \Omega$

Ejemplo 1.2.4.
Sea el experimento de lanzar el dado. Se tiene que $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. Definimos los siguiente sucesos:

- $S_1 = \{\text{obtener } 1\} = \{1\}$
- $S_2 = \{\text{obtener par}\} = \{2,4,6\}$
- $S_3 = \{\text{obtener mayor que } 3\} = \{4,5,6\}$
- $S_4 = \{\text{obtener impar}\} = \{1,3,5\}$
- $S_5 = \{\text{obtener menor o igual que } 4\} = \{1,2,3,4\}$

Se verifica que

- S_1 y S_2 son disjuntos (o mutuamente excluyentes)
- S_3 y S_5 son exhaustivos
- S_2 y S_4 son exhaustivos y mutuamente excluyentes
- S_1 implica S_4, $S_1 \subseteq S_4$

Sean $S_1, S_2 \in E$ dos sucesos cualesquiera. Se verifica que

$$S_1 = (S_1 \cap S_2) \cup (S_1 \cap \overline{S_2})$$

(ver figura 1.3)

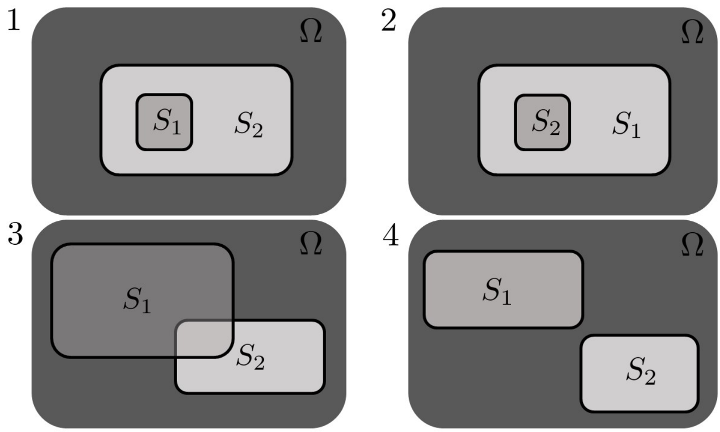

Figura 1.3 $S_1 = (S_1 \cap \overline{S_2}) \cup (S_1 \cap S_2)$.

Además, $S_1 \cap S_2$ y $S_1 \cap \overline{S_2}$ son sucesos mutuamente excluyentes.

1.3 Probabilidad

Definición 1.3.1 (Probabilidad) Dado el espacio muestral E, si la función $P : E \to \mathbb{R}$ verifica:

1. $P(S) \geq 0, \forall S \in E$
2. $P(\Omega) = 1$
3. Para cualquier colección numerable de sucesos de E, $\{S_k\}$ mutuamente excluyentes, entonces $P(\bigcup S_k) = \sum P(S_k)$ (es decir, P es numerablemente aditiva).

entonces diremos que P es una **medida de probabilidad**, o simplemente **probabilidad**.

1.3.1 Propiedades de la probabilidad

Como consecuencia de la definición anterior, se pueden derivar las siguientes propiedades de la probabilidad:

1. $P(\overline{S}) = 1 - P(S), \forall S \in E$
2. $P(S) \leq 1, \forall S \in E$
3. $P(\varnothing) = 0$
4. Si $S_1, S_2 \in E$ con $S_1 \subseteq S_2$, entonces $P(S_1) \leq P(S_2)$
5. $P(S_1 - S_2) = P(S_1) - P(S_1 \cap S_2), \forall S_1, S_2 \in E$
6. $P(S_1 \cup S_2) = P(S_1) + P(S_2) - P(S_1 \cap S_2), \forall S_1, S_2 \in E$. En general, dados $S_1, \ldots, S_n \in E$, se verifica que
   $P(\bigcup S_i) = \sum P(S_i) - \sum P(S_i \cap S_j) + \sum P(S_i \cap S_j \cap S_k) - \cdots + (-1)^{n+1} P(S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n)$.

   Demostración

   1. Para todo suceso S, se tiene que $\Omega = S \cup \overline{S}$. Por el punto 3 de la definición de probabilidad, como $S \cap \overline{S} = \varnothing$ se tiene que $P(\Omega) = P(S) + P(\overline{S})$. Además, por el punto 2 de la definición de probabilidad $P(\Omega) = 1$, entonces despejando se tiene que $P(S) = 1 - P(\overline{S})$.
   2. Por la propiedad anterior se tiene que $P(S) = 1 - P(\overline{S})$. Por el punto 1 de la definición de probabilidad $P(\overline{S}) \geq 0$, por lo tanto $P(S) = 1 - P(\overline{S}) \leq 1$.
   3. Como $\varnothing = \overline{\Omega}$ por las dos propiedades anteriores se tiene que $P(\varnothing) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$
   4. $S_1 \subseteq S_2$. Sea $S = S_2 - S_1 \Rightarrow S_2 = S_1 \cup S$
      Ver Figura 1.4.
      Por lo tanto $P(S_2) = P(S_1 \cup S)$, como $S_1 \cap S = \varnothing$ entonces por el punto 3 de la definición de probabilidad $P(S_2) = P(S_1 \cup S) = P(S_1) + P(S)$, como $P(S) \geq 0$ por el punto 1 de la definición de probabilidad, entonces $P(S_2) \geq P(S_1)$.

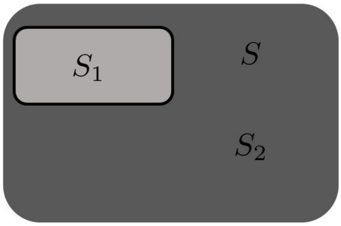

Figura 1.4 $S_2 = S_1 \cup S$.

5. Por definición se tiene que $S_1 - S_2 = S_1 \cap \overline{S_2}$
Como $S_1 = (S_1 \cap S_2) \cup (S_1 \cap \overline{S_2})$ con $S_1 \cap S_2$ y $S_1 \cap \overline{S_2}$ mutuamente excluyentes se tiene por los axiomas de la probabilidad que
$P(S_1) = P(S_1 \cap S_2) + P(S_1 \cap \overline{S_2})$
Por lo tanto $P(S_1 - S_2) = P(S_1 \cap \overline{S_2}) = P(S_1) - P(S_1 \cap S_2)$

6. Se tiene que $S_1 = (S_1 \cap S_2) \cup (S_1 \cap \overline{S_2})$ y de la misma forma $S_2 = (S_2 \cap S_1) \cup (S_2 \cap \overline{S_1})$
Por lo que

$$S_1 \cup S_2 = (S_1 \cap S_2) \cup (S_1 \cap \overline{S_2}) \cup (S_2 \cap S_1) \cup (S_2 \cap \overline{S_1}) = (S_1 \cap S_2) \cup (S_1 \cap \overline{S_2}) \cup (S_2 \cap \overline{S_1})$$

Con los tres elementos mutuamente excluyentes, por lo que

$$P(S_1 \cup S_2) = P(S_1 \cap S_2) + P(S_1 \cap \overline{S_2}) + P(S_2 \cap \overline{S_1})$$

Por el apartado anterior se tiene que $P(S_1 \cap \overline{S_2}) = P(S_1) - P(S_1 \cap S_2)$ y $P(S_2 \cap \overline{S_1}) = P(S_2) - P(S_1 \cap S_2)$
Sustituyendo en la expresión anterior se tiene que

$$P(S_1 \cup S_2) = P(S_1 \cap S_2) + P(S_1) - P(S_1 \cap S_2) + P(S_2) - P(S_1 \cap S_2) =$$

$$P(S_1) + P(S_2) - P(S_1 \cap S_2)$$

□

1.3.2 Probabilidad condicionada

La probabilidad de un suceso puede depender de la ocurrencia o no de otro suceso. Así, un suceso tendría una probabilidad cuando otro suceso ocurre, y otra probabilidad diferente cuando el otro suceso no ocurre.

Ejemplo 1.3.1.

Supongamos que hoy por la mañana me despierto pensando que he quedado por la tarde para salir, y me planteo la posibilidad de que llueva y me estropee el plan. Al coger el móvil para ver la predicción del tiempo me doy cuenta de que está sin batería, y el cargador no lo tengo a mano.

Sea el suceso A={Llover esta tarde}. ¿Cuál será la probabilidad de A? Sea el suceso B={Nublado por la mañana}. ¿Cuál será la probabilidad de B?

Sin embargo, nada más levantarme abro la ventana y veo que está nublado. ¿Cuál es la probabilidad de A ahora? ¿Es la misma que antes?

El suceso para el cual nos planteamos cuál es su probabilidad no es A, realmente es {Que llueva esta tarde sabiendo que por la mañana está nublado}. Este suceso se denota $A|B$ (A condicionado a B), y la probabilidad que queremos saber es $P(A|B)$, es decir, la probabilidad de que ocurra A sabiendo que B ha ocurrido. Es interesante notar que

$$P(A) \neq P(A|B)$$

Un suceso distinto es $A \cap B$={Que esté nublado por la mañana y llueva por la tarde}. Intuitivamente se ve que $P(A|B)$ tiene alguna relación con $P(A \cap B)$, es decir, el suceso condicionado tiene alguna relación con la intersección de ambos sucesos. Pero también es lógico que $P(A|B)$ dependa de $P(B)$, ya que B debe ocurrir.

¿Cuál es dicha relación?

Ejemplo 1.3.2.

Sea el suceso A={Tocar la lotería}. Si se pensara en el hecho de hallar la probabilidad de que toque la lotería, lo natural sería pensar que se ha comprado un billete y que dicha probabilidad debe ser muy baja,

Sea ahora el suceso B={Comprar el 90 % de los billetes de lotería}.

Ahora, la probabilidad de que toque la lotería no es la misma, dependerá de que se haya comprado o no el 90 % de los billetes. Si se define $A \mid B$ como el suceso {Tocar la lotería si se compra el 90 % de los billetes, es claro que

$$P(A) \neq P(A \mid B)$$

Un suceso diferente a $A \mid B$ es $A \cap B$. Intuitivamente, se puede pensar que la probabilidad de que toque la lotería si se han comprado el 90 % de los billetes o no será mayor que la probabilidad de que ocurran las dos cosas a la vez: que nos toque la lotería y se hayan comprado el 90 % de los billetes. Es decir:

$$P(A \cap B) \leq P(A \mid B)$$

Si la probabilidad de comprar el 90 % de los billetes es $P(B)$. Se intuye que la probabilidad condicionada a B dependerá de la probabilidad que se tiene de que B

ocurra o no. También depende de la probabilidad de que A y B ocurra, y la relación es la siguiente:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Es decir, la probabilidad de que ocurra A si ocurre B mide la relación entre la probabilidad de que ocurran los dos sucesos a la vez y la probabilidad de que B ocurra.

Definición 1.3.2 (Probabilidad condicionada) Dados A,B dos sucesos con $P(B) > 0$. Se define la **probabilidad** de A **condicionada** a B como

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

La probabilidad de A condicionada a B es la probabilidad de que ocurra A sabiendo que B ha sucedido.

Con la definición de probabilidad condicionada podemos hallar la probabilidad de la intersección, ya que $P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B)$.

Ejemplo 1.3.3.

- En una urna hay 3 bolas blancas y 4 bolas negras. Se extraen dos bolas al azar de forma consecutiva.
  1. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola sea blanca?
     Sean $B_i = \{\text{Sale bola blanca en la extracción } i\}$ y $N_i = \{\text{Sale bola negra en la extracción } i\}$
     $P(B_1) = \frac{3}{7}$
  2. ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bola sea blanca si la primera ha sido blanca?
     $P(B_2 \mid B_1) = \frac{2}{6}$
  3. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas sean blancas?
     $P(B_1 \cap B_2) = P(B_2 \mid B_1)P(B_1) = \frac{3}{7}\frac{2}{6} = \frac{1}{7}$
  4. Ejercicio. Hallar todas las probabilidades condicionadas y las intersecciones.
- En el aeropuerto de Sevilla, se sabe que la probabilidad de que haya niebla si la temperatura bajó de los $0\,^\circ$C la noche anterior es de 0.8. La probabilidad de que la temperatura baje de cero grados por la noche en el aeropuerto de Sevilla es de 0.02. ¿Cuál es la probabilidad de que esta mañana haya niebla y anoche la temperatura haya bajado de cero grados?

  Sea $A = \{\text{Hay niebla}\}$ y $B = \{\text{La temperatura bajó de cero grados}\}$. Tenemos que $P(B) = 0.02$ y la probabilidad de que haya niebla si la temperatura bajó de cero grados: $P(A \mid B) = 0.8$

  La probabilidad de que baje la temperatura de cero grados y haya niebla al día siguiente: $P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B) = 0.8 \cdot 0.02 = 0.016$.

Algunas consecuencias inmediatas de la definición son:

1. En general, $P(A \mid B) \neq P(B \mid A)$

2. Si $P(B) = 1 \Rightarrow P(A \mid B) = P(A \cap B)$

3. $P(A \cap B) \leq P(A \mid B)$

4. $P(A \mid B) + P(\bar{A} \mid B) = 1$

5. Si $B \subseteq A \Rightarrow P(A \mid B) = 1$

Demostración

1. Se tiene por un lado que $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, y por otro lado que $P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$. En general $P(A) \neq P(B)$, entonces se tiene el resultado.

2. El resultado es directo de la definición de probabilidad condicionada: Si $P(B) = 1 \Rightarrow P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A \cap B)$.

3. Como $P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B)$ y $P(B) \leq 1$, se tiene que $P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B) \leq P(A \mid B)$.

4. Se tiene que $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ y $P(\overline{A} \mid B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)}$. Por lo tanto,

$$P(A \mid B) + P(\overline{A} \mid B) = \frac{P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)}{P(B)}$$

Se tiene que $B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$ y además $A \cap B$ y $\overline{A} \cap B$ son disjuntos, por lo que $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$. Por lo tanto,

$$P(A \mid B) + P(\overline{A} \mid B) = \frac{P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

5. Si $B \subseteq A \Rightarrow A \cap B = B$. Entonces $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$

□

Ejemplo 1.3.4.

- En el ejemplo de las bolas se puede comprobar que $P(B_1 \cap B_2) = \frac{1}{7} \leq P(B_2 \mid B_1) = \frac{2}{6}$
  Además, el suceso complementario de sacar bola en la segunda extracción si salió blanca en la primera, es sacar negra en la segunda si salió blanca en la primera. Es sencillo comprobar que $P(B_2 \mid B_1) + P(N_2 \mid B_1) = 1$ ya que $P(N_2 \mid B_1) = \frac{4}{6}$.

- Si la temperatura no baja de $0\,^\circ$C, dicha probabilidad se reduce a 0.01. Nótese que $P(A \mid B)$ y $P(A \mid \overline{B})$ no tienen por qué sumar 1. ¿Cuál es la probabilidad de que no haya niebla si la temperatura bajó de $0\,^\circ$C? ¿y de que no haya niebla si la temperatura no bajó de $0\,^\circ$C?

  Tenemos que la probabilidad de que haya niebla si la temperatura bajó de cero grados es $P(A \mid B) = 0.8$ y si la temperatura no bajó de cero grados es $P(A \mid \overline{B}) = 0.01$. Por lo tanto,

$$P(\overline{A} \mid B) = 1 - P(A \mid B) = 1 - 0.8 = 0.2$$
$$P(\overline{A} \mid \overline{B}) = 1 - P(A \mid \overline{B}) = 1 - 0.01 = 0.99$$

La definición de la probabilidad condicionada se puede aplicar de forma recursiva dando lugar a la denominada **regla de la multiplicación**.

Teorema 1.3.1 (Regla de la multiplicación) *Dados los sucesos $A_1, \ldots, A_n$ tales que $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) > 0$, entonces*

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n \mid A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

Demostración

La demostración del teorema anterior es inmediata descomponiendo sucesivamente $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$:

$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P((A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \cap A_n) = P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})P(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) = P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-2})P(A_{n-1} \mid A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-2})P(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) = \ldots$

$\square$

Ejemplo 1.3.5.

- En el ejemplo de las bolas, hallar la probabilidad de que salgan tres bolas blancas. $P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = P(B_3 \mid B_1 \cap B_2)P(B_2 \mid B_1)P(B_1) = \frac{1}{5}\frac{2}{6}\frac{3}{7} = \frac{1}{35}$
- La probabilidad de que un vuelo despegue cuando hay niebla y la temperatura bajó de $0\,^\circ$C es 0.3. Hallar la probabilidad de que un vuelo despegue, haya niebla y la temperatura bajó de los $0\,^\circ$C.

  Sea $C = \{\text{un vuelo despega}\}$

$$P(A \cap B \cap C) = P(C \mid A \cap B)P(A \mid B)P(B) = 0.3 \cdot 0.8 \cdot 0.02 = 0.0048$$

1.3.3 Probabilidad total. Fórmula de Bayes

Teorema 1.3.2 (Teorema de la probabilidad total) *Dada una colección numerable de sucesos $\{A_k\}_{k\in K}$, con $K \subseteq \mathbb{N}$ exhaustivos y mutuamente excluyentes, es decir,*

1. $\bigcup_{k\in K} A_k = \Omega$
2. $A_k \cap A_l = \varnothing$, $\forall k \neq l$, $k,l \in K$

y con $P(A_k) > 0$, $\forall k \in K$, se verifica para todo suceso A que

$$P(A) = \sum_{k\in K} P(A \mid A_k)P(A_k)$$

Demostración

Veremos el caso con K finito, pudiéndose extender al caso general:

Sea $\{A_k\}_{k\in\{1,\ldots,n\}}$ bajo las condiciones del teorema. Puesto que A_k son exhaustivos, se tiene que: $A = A\cap\Omega = A\cap(A_1 \cup\ldots\cup A_n) = (A\cap A_1)\cup\ldots\cup(A\cap A_n)$.

Como los A_k son mutuamente excluyentes, se tiene que: $(A\cap A_k)\cap(A\cap A_j) = \varnothing$ para $k \neq j$. Por tanto:

$$P(A) = P\left((A\cap A_1)\cup\ldots\cup(A\cap A_n)\right) = P(A\cap A_1)+\ldots+P(A\cap A_n)$$

Aplicando la definición de probabilidad condicional en cada uno de los términos (se puede aplicar porque $P(A_k) > 0\ \forall k$):

$$P(A) = P(A \mid A_1)P(A_1)+\ldots+P(A \mid A_n)P(A_n)$$

□

Ejemplo 1.3.6.

- ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bola sea blanca?
  Están pidiendo $P(B_2)$, aplicando el teorema tenemos
  $P(B_2) = P(B_2 \mid B_1)P(B_1)+P(B_2 \mid N_1)P(N_1) = \frac{2}{6}\frac{3}{7}+\frac{3}{6}\frac{4}{7} = \frac{1}{7}+\frac{2}{7} = \frac{3}{7}$
- En el ejemplo del aeropuerto, la regla de la Probabilidad Total permitiría calcular la probabilidad de que haya niebla: $P(A) = P(A \mid B)P(B)+P(A \mid \overline{B})P(\overline{B}) = 0.8\cdot 0.02+0.01\cdot 0.98 = 0.016+0.0098 = 0.0258$.

Una consecuencia del teorema anterior es la llamada fórmula de Bayes, que permite establecer la relación entre las probabilidades condicionadas de dos sucesos.

Teorema 1.3.3 (Fórmula de Bayes) *Dada una colección numerable de sucesos $\{A_k\}_{k\in K}$, con $K \subseteq \mathbb{N}$ exhaustivos y mutuamente excluyentes, es decir,*

1. $\bigcup_{k\in K} A_k = \Omega$

2. $A_k \cap A_l = \varnothing$, $\forall k \neq l,\ k,l \in K$

y con $P(A_k) > 0$, $\forall k \in K$, *y dado* A *con* $P(A) > 0$, *se verifica*

$$P(A_k \mid A) = \frac{P(A_k \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \mid A_k)P(A_k)}{\sum_{k \in K} P(A \mid A_k)P(A_k)} \quad \forall k \in K$$

Demostración

Por definición de probabilidad condicionada se tiene que para todo A_k,

$$P(A_k \mid A) = \frac{P(A \cap A_k)}{P(A)}$$

También por la definición de probabilidad condicionada, se tiene que $P(A \cap A_k) = P(A \mid A_k)P(A_k)$, y por el teorema de la probabilidad total hemos visto que

$$P(A) = P(A \mid A_1)P(A_1) + P(A \mid A_2)P(A_2) + \cdots + P(A \mid A_K)P(A_K) = \sum_{k \in K} P(A \mid A_k)P(A_k)$$

Sustituyendo se tiene que

$$P(A_k \mid A) = \frac{P(A \mid A_k)P(A_k)}{\sum_{k \in K} P(A \mid A_k)P(A_k)}$$

□

Ejemplo 1.3.7.

- ¿Cuál es la probabilidad de que haya salido la primera bola blanca si la segunda es blanca?

$$P(B_1 \mid B_2) = \frac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_2)} = \frac{P(B_2 \mid B_1)P(B_1)}{P(B_2 \mid B_1)P(B_1) + P(B_2 \mid N_1)P(N_1)} = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{3}{7}} = \frac{1}{3}$$

- En el ejemplo anterior eran conocidas las probabilidades de que hubiese niebla si la temperatura era inferior (o superior) a los cero grados (probabilidades de A condicionadas a B). El teorema de Bayes permite obtener las probabilidades de B condicionadas a A (es decir, las probabilidades de que la temperatura haya sido inferior o superior a los cero grados, sabiendo que ha habido niebla o no). Así, es posible determinar:
  - Probabilidad de que haya hecho menos de cero grados si al día siguiente hubo niebla:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \mid B)P(B)}{P(A)} = \frac{0.8 \cdot 0.02}{0.0258} = 0.62$$

– Probabilidad de que haya hecho más de cero grados si al día siguiente no hubo niebla:

$$P(\overline{B} \mid \overline{A}) = \frac{P(\overline{A} \mid \overline{B})P(\overline{B})}{P(\overline{A})} = \frac{0.99 \cdot 0.98}{1 - 0.0258} = \frac{0.9702}{0.9742} = 0.9959$$

1.3.4 Independencia

Definición 1.3.3 (Sucesos independientes) Diremos que dos **sucesos** A,B son **independientes** cuando

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

En este caso, si $P(B) > 0$, entonces $P(A \mid B) = P(A)$, es decir, la probabilidad de A no cambia si sucede B o no.

Ejemplo 1.3.8.

- ¿Qué pasaría con los sucesos si en vez de sacar las bolas una detrás de otra, la vamos devolviendo a la urna? ¿Cuál es la probabilidad en este caso de sacar blanca en la segunda extracción si ha salido blanca en la primera? ¿Cuál es la probabilidad de la intersección?

  Como ahora hay independencia, $P(B_2 \mid B_1) = P(B_2) = \frac{3}{7}$, y por lo tanto $P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P(B_2) = \left(\frac{3}{7}\right)^2$
- Volviendo al ejemplo del aeropuerto, supongamos que va a despegar un avión. La probabilidad de que un avión sea de Iberia es del 65 %. La probabilidad de que haya niebla en el aeropuerto hemos visto que es $P(A) = 0.0258$. ¿Cuál es la probabilidad de que el avión sea de iberia y haya niebla?

  Que el avión sea de Iberia no depende de que haya niebla. Y el que haya niebla no depende de la compañía que vuele. Son sucesos independientes. Definiendo $B = \{$el avión que despega es de Iberia$\}$

  $$P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0.0258 \cdot 0.65 = 0.01677$$

  Sin embargo, hay que tener cuidado en no confundir el hecho de que dos sucesos son independientes con que sean disjuntos.

  En el ejemplo se puede ver claramente que $A \cap B$ no es vacío, ya que pueden pasar las dos cosas a la vez. Además $A \cap B$ es un suceso con probabilidad mayor estricta que cero. Que los sucesos sean disjuntos no tiene nada que ver con que sean independientes. De hecho, si dos sucesos (distintos del conjunto vacío) son disjuntos nunca serán independientes.

  Por ejemplo, supongamos que la probabilidad de que un avión sea de Ryanair es del 15 %. Se tiene que el suceso $B = \{$el avión que despega es de Iberia$\}$ y el suceso $C = \{$el avión que despega es de Ryanair$\}$ son sucesos disjuntos, ya que $B \cap C = \varnothing$, el avión no puede ser de las dos compañías a la vez. Por lo tanto, $P(B \cap C) = P(\varnothing) = 0$. Sin embargo $P(B)P(C) = 0.65 \cdot 0.15$, por lo que se tiene que $P(B \cap C) \neq P(B)P(C)$ y no son independientes. Por lo tanto hay dependencia. ¿Por qué? pues por que si el avión es de Iberia entonces no es de Ryanair y viceversa, por lo tanto la probabilidad de que sea de Iberia dependerá de que sea o no de Ryanair.

Vamos a calcular entonces la probabilidad de B condicionada a C.

$P(B \mid C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{0}{0.15} = 0$

¿Y la probabilidad de C condicionada a B?

$P(C \mid B) = \frac{P(B \cap C)}{P(B)} = \frac{0}{0.65} = 0$

¿Entonces? Que esa probabilidad sea cero no implica que sean independientes. Al ser disjuntos, la probabilidad condicionada es distinta de cero para los sucesos complementarios.

Sabemos que $P(\overline{B}) = 1 - 0.65 = 0.35$ y $P(\overline{C}) = 1 - 0.15 = 0.85$ y por lo tanto para hallar $P(B \mid \overline{C}) = \frac{P(B \cap \overline{C})}{P(\overline{C})}$, hace falta conocer $P(B \cap \overline{C})$.

Si el avión no es de Ryanair es por que es de Iberia o de otra compañía, por lo que $B \cap \overline{C} = B$, y

$P(B \mid \overline{C}) = \frac{P(B)}{P(\overline{C})} = \frac{0.65}{0.85} = 0.7647$

Se puede hallar de la misma forma $P(C \mid \overline{B})$.

1.4 Sucesos equiprobables

En este apartado nos centraremos en los casos con un conjunto finito de resultados donde cada uno de los sucesos elementales tiene la misma probabilidad. Para estos casos, veremos que el cálculo de las probabilidades de cualquier suceso se reduce a un problema de determinación del número total de sucesos elementales existentes.

Teorema 1.4.1 (Regla de Laplace) *Sea Ω el conjunto finito de resultados de un experimento aleatorio. Si P probabilidad verifica que $P(\{\omega\}) = c$, $\forall \{\omega\} \in \Omega$, con c constante, entonces*

$$P(S) = \frac{|S|}{|\Omega|} \quad \forall S \in \Omega$$

con $|S|$ el número de sucesos elementales en S.

Demostración

Como Ω es finito, se puede escribir como unión de todos los sucesos elementales que lo forman, $\Omega = \bigcup \{\omega_k\}$. Así, cualquier suceso de Ω, S, se puede escribir como unión de un subconjunto de sucesos elementales, $S = \bigcup_{k=1}^{K} \{\omega_k\}$. Por lo tanto, se tiene que $|S| = K$.

$$P(S) = P\left(\bigcup_{k=1}^{K} \{\omega_k\}\right) \overset{\{\omega_k\} \text{ mut excl}}{=} \sum_{k=1}^{K} P(\{\omega_k\}) = K \cdot c = |S|c$$

Por lo tanto, se tiene que

$$P(\Omega) = P(\bigcup\{\omega_k\}) = \sum P(\{\omega_k\}) = |\Omega|c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{|\Omega|}$$

Así,

$$P(S) = \frac{|S|}{|\Omega|}$$

$\square$

Ejemplo 1.4.1.

- En el experimento sobre el lanzamiento del dado y observar el número obtenido, los sucesos elementales son equiprobables, y la probabilidad de cada uno de ellos es $P(\omega_i) = 1/6$, ya que $|\Omega| = 6$. Cualquier otro suceso de dicho experimento verificará la regla de Laplace. Por ejemplo:
  - $S_1 = \{\text{obtener un número par}\} = \{2,4,6\}$, se tiene que $|S_1| = 3$, por lo que
  $$P(S_1) = \frac{|S_1|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$
  - $S_2 = \{\text{obtener un número mayor que 4}\} = \{5,6\}$, se tiene que $|S_2| = 2$, por lo que
  $$P(S_2) = \frac{|S_2|}{|\Omega|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$
  - $S_3 = \{\text{obtener un número que acabe en } s\} = \{2,3,6\}$, se tiene que $|S_3| = 3$, por lo que
  $$P(S_3) = \frac{|S_3|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$
- En el experimento sobre lanzar una moneda y contar el número de lanzamientos antes de que salga cara no tenemos un espacio muestral finito.

Este teorema permite simplificar enormemente el cálculo de probabilidades en el caso en el que los sucesos elementales sean equiprobables, ya que indica que, en este caso, la probabilidad de un suceso es el número de resultados favorables contenidos en dicho suceso dividido entre el número de casos posibles. El problema, por tanto, se reduce a *contar* los casos posibles.

Nótese que contar los casos favorables y los casos posibles puede no ser tan obvio como en el ejemplo anterior, sino que se deban contar los casos en probabilidades condicionadas:

Ejemplo 1.4.2.

Supóngase que se tienen tres piezas determinadas: una fabricada en España, otra en Francia, y otra en Alemania. Al irlas utilizando sucesivamente, ¿cuál es la probabilidad de que la primera utilizada sea la de España y la segunda la de Francia (y, obviamente, que la tercera sea la de Alemania)?

Notemos los siguientes sucesos:

$E1 := \{$La pieza utilizada en primer lugar está fabricada en España$\}$

$F2 := \{$La pieza utilizada en segundo lugar está fabricada en Francia$\}$

$A3 := \{$La pieza utilizada en tercer lugar está fabricada en Alemania$\}$

Se nos pide la probabilidad: $P(E1 \cap F2 \cap A3)$. Por la regla de la multiplicación:

$P(E1 \cap F2 \cap A3) = P(E1) \cdot P(F2|E1) \cdot P(A3|E1 \cap F2)$

Las probabilidades anteriores se pueden calcular con la regla de Laplace:

$P(E1) = \frac{1}{3}$, puesto que hay un caso favorable de tres posibles.

$P(F2|E1) = \frac{1}{2}$, puesto que hay un caso favorable de dos posibles.

$P(A3|E1 \cap F2) = 1$, puesto que hay un caso favorable de uno posible.

Nótese que esto coincide con nuestra intuición, que indicaba que, una vez que se habían utilizado las piezas de España y de Francia, la tercera tenía que ser la de Alemania.

Con lo que $P(E1 \cap F2 \cap A3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1$.

Nótese que, en general, si hubiese N elementos distintos y se pretendiese obtener un orden concreto, la probabilidad de dicho orden sería $\frac{1}{N!}$

Ejemplo 1.4.3.

Se tiene un grupo de prácticas de cinco alumnos: **A**licia, **B**eatriz, **C**armen, **D**aniel, y **E**duardo. Han quedado a las 12:00 para completar un trabajo y se desea saber cuál es la probabilidad de que lleguen exactamente en el orden arriba indicado: (A,B,C,D,E).

Asumiendo que todos son puntuales, la probabilidad de un orden concreto es la misma para todos, por lo que es posible aplicar la regla de Laplace (en caso contrario habría probabilidades distintas para distintos órdenes). Así, la probabilidad de (A,B,C,D,E) es:

$$\frac{1}{5!} = \frac{1}{120}$$

Y el número total de órdenes posibles $5! = 120$.

Ahora se desea saber cuál es la probabilidad de que primero lleguen las tres mujeres y después los dos hombres: (M,M,M,H,H). En este caso, el número de órdenes posibles es menor:

(M,H,M,H,M)	(M,H,M,M,H)	(M,H,H,M,M)	(M,M,H,M,H)	(M,M,H,H,M)
(M,M,M,H,H)	(H,M,H,M,M)	(H,M,M,H,M)	(H,M,M,M,H)	(H,H,M,M,M)

Como es indiferente qué mujer llegue en qué orden (mientras lleguen antes que los hombres), todas las permutaciones de mujeres (3!) son la misma respecto a la solución (M,M,M,*,*).

Igualmente, todas las permutaciones de hombres (2!) son la misma respecto a la solución (*,*,*,H,H).

Así, es posible ver que un orden concreto, si todos los elementos de un mismo grupo (hombres o mujeres) no se distinguen entre sí, es equivalente a $3! \cdot 2!$ órdenes cuando sí se distinguen. Por tanto, la probabilidad de un orden concreto será:

$$\frac{\text{Casos favorables}}{\text{Total de casos}} = \frac{3! \cdot 2!}{5!} = \frac{1}{10}$$

Y el número de órdenes posibles será:

$$\frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$$

En general, cuando se tengan un total de n elementos, de los que k pertenecen a un grupo, y $n-k$ a otro, se tendrá que el número de órdenes posibles será:

$$\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}$$

1.5 Ejercicios

Ejercicio 1.1 *Dados S_1 y S_2 dos sucesos de E, comprobar gráficamente que se verifican las denominadas **Leyes de Morgan**:*

1. $\overline{S_1 \cup S_2} = \overline{S_1} \cap \overline{S_2}$.
2. $\overline{S_1 \cap S_2} = \overline{S_1} \cup \overline{S_2}$.

Solución

1. Ver Figura 1.5.

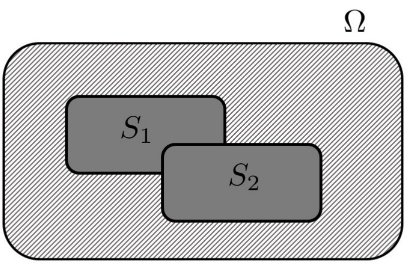

Figura 1.5 $\overline{S_1 \cup S_2} = \overline{S_1} \cap \overline{S_2}$.

$\subseteq$:

Tomar $\omega \in \overline{S_1 \cup S_2}$, se puede ver que $\omega \in \overline{S_1}$ y $\omega \in \overline{S_2}$. Por lo tanto $\omega \in \overline{S_1} \cap \overline{S_2}$.

$\supseteq$:

Tomar $\omega \in \overline{S_1} \cap \overline{S_2}$. Se puede ver que $\omega \notin S_1 \cup S_2$, por lo tanto $\omega \in \overline{S_1 \cup S_2}$

2. Ver Figura 1.6.

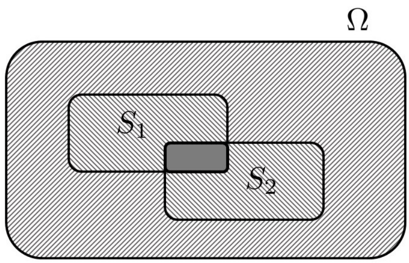

Figura 1.6 $\overline{S_1 \cap S_2} = \overline{S_1} \cup \overline{S_2}$.

$\subseteq$:

Tomar $\omega \in \overline{S_1 \cap S_2}$, entonces $\omega \notin S_1 \cap S_2$. Se puede ver que $\omega \in \overline{S_1}$ ó $\omega \in \overline{S_2}$. Por lo tanto $\omega \in \overline{S_1} \cup \overline{S_2}$.

$\supseteq$:

Tomar $\omega \in \overline{S_1} \cup \overline{S_2}$. Si $\omega \in \overline{S_1} \Rightarrow \omega \notin S_1 \cap S_2$. De la misma forma, si $\omega \in \overline{S_2} \Rightarrow \omega \notin S_1 \cap S_2$. Por lo tanto $\omega \in \overline{S_1 \cap S_2}$

Ejercicio 1.2 **1.** *Dados dos sucesos A y B, con $P(B) < 1$, demostrar que*

$$P(A \mid \overline{B}) = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)}$$

2. *Si $A \subset B$, hallar $P(A|B) + P(A|\bar{B})$.*

Solución

1. Por la definición de probabilidad condicionada se tiene que

$$P(A \mid \overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})}$$

Por el apartado tercero del ejercicio 1.1 se tiene que $P(A \cap \overline{B}) = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$, además, $P(\overline{B}) = 1 - P(B)$, por lo que sustituyendo se tiene el resultado.

2.

$$P(A/B)+P(A/\bar{B}) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} + \frac{P(A\cap \bar{B})}{P(\bar{B})}$$

Como $A \subset B \Rightarrow A\cap B = A$ y $A\cap \bar{B} = \emptyset$, por lo que se tiene que

$$P(A/B)+P(A/\bar{B}) = \frac{P(A)}{P(B)} + \frac{P(\emptyset)}{1-P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)}$$

Ejercicio 1.3 *Dada una colección numerable de sucesos $\{A_k\}_{k\in K}$, con $K \subseteq \mathbb{N}$ exhaustivos y mutuamente excluyentes, con $P(A_k) > 0$, $\forall k \in K$, y dado A con $P(A) > 0$ (condiciones de la fórmula de Bayes), demostrar que:*

$$\sum_{k\in K} P(A_k \mid A) = 1$$

Solución

Por la fórmula de Bayes se tiene que

$$P(A_k \mid A) = \frac{P(A \mid A_k)P(A)}{\sum_{k\in K} P(A \mid A_k)P(A)}$$

por lo tanto

$$\sum_{k\in K} P(A_k \mid A) = \sum_{k\in K} \frac{P(A \mid A_k)P(A)}{\sum_{k\in K} P(A \mid A_k)P(A)} = \frac{\sum_{k\in K} P(A \mid A_k)P(A)}{\sum_{k\in K} P(A \mid A_k)P(A)} = 1$$

Ejercicio 1.4 *Sean A y B dos sucesos independientes.*

1. *Utilizando una de las leyes de Morgan (ver ejercicio 1.1), calcular $P(\overline{A}\cap\overline{B})$ en función de $P(A)$ y $P(B)$.*
2. *Calcular $P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})$ en función de $P(A)$ y $P(B)$.*
3. *¿Son $\overline{A}$ y $\overline{B}$ independientes? Justificar la respuesta.*

Solución

A y B independientes $\Rightarrow P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$

1. Por las leyes de Morgan se tiene que $\overline{A}\cap\overline{B} = \overline{A\cup B}$, por lo que $P(\overline{A}\cap\overline{B}) = P(\overline{A\cup B}) = 1-P(A\cup B) = 1-(P(A)+P(B)-P(A\cap B)) = 1-P(A)-P(B)+P(A)P(B)$
2. $P(\overline{A})P(\overline{B}) = (1-P(A))(1-P(B)) = 1-P(A)-P(B)+P(A)P(B)$
3. De los apartados anteriores se concluye que $P(\overline{A}\cap\overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B})$ por lo que $\overline{A}$ y $\overline{B}$ son independientes.

1.6 Problemas

Problema 1.1 *** Un estudiante se ha estudiado 10 temas de un libro de 15 temas. Cada tema tiene el mismo número de páginas. Si abre el libro al azar por cualquier página cuatro veces, se pide:*

1. *Probabilidad de que el estudiante se haya estudiado todos los temas de la página por la que ha abierto el libro las cuatro veces.*
2. *Probabilidad de que el estudiante no se haya estudiado los temas de la página por la que ha abierto el libro las cuatro veces.*
3. *Probabilidad de que el estudiante se haya estudiado dos de los temas de la página por la que ha abierto el libro las cuatro veces.*

Solución
Definimos los sucesos para cada vez que el estudiante abre el libro.

$A_i = \{$El tema de la i-ésima vez que abre el libro se lo ha estudiado el estudiante$\}$, $i = 1, \ldots 4$.

Cada vez que abra el libro, el resultado obtenido no tiene relación con la vez anterior, por lo que A_i son independientes. Se tiene que la probabilidad de que se haya estudiado el tema de la vez i $P(A_i) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$, y de que no se lo haya estudiado es $P(\overline{A_i}) = \frac{1}{3}$.

1. Nos piden la probabilidad de que, de las cuatro veces. el estudiante ha abierto el libro por un tema que se ha estudiado;

$$P(\text{el estudiante se ha estudiado los 4 temas}) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$$

Al ser independientes:

$$P(\text{el estudiante se ha estudiado los cuatro temas}) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) =$$

$$= P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4) = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = 0.1975$$

2. Nos piden la probabilidad de que las cuatro veces el estudiante ha abierto el libro por un tema que no se ha estudiado:

$$P(\text{el estudiante no se ha estudiado los 4 temas}) = P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4})$$

Al ser independientes:

$$P(\text{el estudiante no se ha estudiado los 4 temas}) = P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}) =$$

$$= P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) \cdot P(\overline{A_4}) = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = 0.0123$$

3. Nos piden la probabilidad de que las cuatro veces, dos veces el estudiante ha abierto el libro por un tema que se ha estudiado:

$$P(\text{el estudiante se ha estudiado 2 temas})$$

Nótese que el suceso anterior puede darse tanto si se ha estudiado el tema que sale la primera y segunda veces, o la primera y la tercera, etc. Así, para calcular la probabilidad anterior es preciso saber cuántas formas hay de ordenar cuatro elementos, dos de cada grupo. Por tanto:

$$P(\text{el estudiante se ha estudiado 2 temas}) = \binom{4}{2} P(\overline{A}) \cdot P(\overline{A}) \cdot P(A) \cdot P(A) =$$

$$= 6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 0.2963$$

Problema 1.2 *** Un estudiante se ha estudiado 10 temas de un temario de 15 temas. Si el profesor elige 4 temas al azar para que entren en el examen, se pide:*

1. *Probabilidad de que el estudiante se haya estudiado los cuatro temas.*

2. *Probabilidad de que el estudiante no se haya estudiado ninguno de los cuatro temas.*

3. *Probabilidad de que el estudiante se haya estudiado dos de los cuatro temas.*

Solución

Definimos los sucesos:
$A_i = \{\text{El tema } i \text{ elegido se lo ha estudiado el estudiante}\}$, $i = 1, \ldots 4$.

1. Nos piden la probabilidad de que el estudiante se haya estudiado 4 temas de los que elegirá el profesor, es decir, la probabilidad de que se haya estudiado el primero y el segundo y el tercero y el cuarto:

$$P(\text{el estudiante se ha estudiado los 4 temas}) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$$

Una forma de verlo es, a medida que el profesor elige cada tema, calcular la probabilidad de que se lo haya estudiado el estudiante, sabiendo si el/los tema/s elegido/s anteriormente se lo/s estudió el estudiante. Por la regla de la multiplicación se tiene que:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid (A_1 \cap A_2)) \cdot P(A_4 \mid (A_1 \cap A_2 \cap A_3))$$

Se tiene que

$$P(A_1) = \frac{10}{15}$$

$$P(A_2 \mid A_1) = \frac{9}{14}$$

$$P(A_3 \mid (A_1 \cap A_2)) = \frac{8}{13}$$

$$P(A_4 \mid (A_1 \cap A_2 \cap A_3)) = \frac{7}{12}$$

Finalmente que

$$P(\text{el estudiante se ha estudiado los cuatro temas}) = \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} \cdot \frac{8}{13} \cdot \frac{7}{12} =$$

$$= \frac{2}{13} = 0.1538$$

2. Nos piden la probabilidad de que el estudiante no se haya estudiado ninguno de los 4 temas de los que elegirá el profesor, es decir, la probabilidad de que se haya estudiado el primero y el segundo y el tercero y el cuarto:

$$P(\text{el estudiante no se ha estudiado los 4 temas}) = P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4})$$

Una forma de verlo es, a medida que el profesor elige cada tema, calcular la probabilidad de que no se lo haya estudiado el estudiante, sabiendo que el/los tema/s elegido/s anteriormente no se lo/s estudió el estudiante. Por la regla de la multiplicación se tiene que:

$$P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}) =$$

$$= P(\overline{A_1})P(\overline{A_2} \mid \overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_3} \mid (\overline{A_1} \cap \overline{A_2})) \cdot P(\overline{A_4} \mid (\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}))$$

Se tiene que

$$P(\overline{A_1}) = \frac{5}{15}$$

$$P(\overline{A_2} \mid \overline{A_1}) = \frac{4}{14}$$

$$P(\overline{A_3} \mid (\overline{A_1} \cap \overline{A_2})) = \frac{3}{13}$$

$$P(\overline{A_4} \mid (\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3})) = \frac{2}{12}$$

Finalmente que

$$P(\text{el estudiante no se ha estudiado los cuatro temas}) = \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{3}{13} \cdot \frac{2}{12} =$$

$$= 0.0037$$

3. En este caso, veamos primero la posibilidad de que el estudiante se ha estudiado los dos temas que salen primero, y luego los otros dos. Este suceso seria:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1) \cdot P(\overline{A_3} \mid (A_1 \cap A_2)) \cdot P(\overline{A_4} \mid (A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}))$$

Se tiene que

$$P(A_1) = \frac{10}{15}$$

$$P(A_2 \mid A_1) = \frac{9}{14}$$

$$P(\overline{A_3} \mid (A_1 \cap A_2)) = \frac{5}{13}$$

$$P(\overline{A_4} \mid (A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3})) = \frac{4}{12}$$

por tanto:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}) = \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{4}{12} = 0.0549$$

Puede verse que esta probabilidad es la misma con independencia del orden de los temas que se sabe o no el estudiante. Así, por ejemplo, la probabilidad de no saber el primero y el segundo sería:

$$P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3 \cap A_4) = \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{10}{13} \cdot \frac{9}{12}$$

Por tanto, para calcular la probabilidad pedida simplemente es necesario multiplicar la de un caso por el número de formas distintas de ordenar dos aciertos (el estudiante sabe el tema que sale), y dos fracasos:

$$P(\text{el estudiante se ha estudiado 2 temas}) = \binom{4}{2} P(\overline{A}) \cdot P(\overline{A}) \cdot P(A) \cdot P(A) =$$

$$= 6 \cdot 0.0549 = 0.3297$$

Problema 1.3 ** *En un estudio realizado entre 90 productos, se tiene que 30 cumplen la característica A, 30 otra característica B, y 10 verifican los dos tipos de características. Determinar que un producto al azar presente:*

1. *Exactamente k características de las dos estudiadas, con* $k = 0,1,2$
2. *Al menos k características de las dos estudiadas, con* $k = 0,1,2$.
3. *No más de k características de las dos estudiadas, con* $k = 0,1,2$.

Solución

La figura 1.7 muestra la distribución de los productos por tipos.

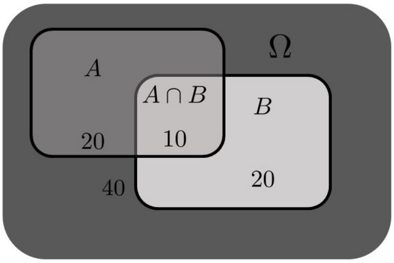

Figura 1.7 Distribución de los productos por tipos. Problema 1.3.

1. Tenemos que k puede ser 0, 1 ó 2.

$$|\Omega| = 90$$

La probabilidad de que un producto tenga la característica A es

$$P(A) = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$$

La probabilidad de que un producto tenga la característica B es

$$P(B) = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$$

La probabilidad de que un producto tenga las dos características es

$$P(A \cap B) = \frac{10}{90} = \frac{1}{9}$$

Que no tenga ninguna de las características es que no tenga la característica A y no tenga la característica B,

$$P(\text{Exactamente } 0) = \frac{40}{90} = \frac{4}{9} = 0.44444$$

Que tenga sólo una de las características es que tenga la característica A y no tenga la característica B, o que no tenga la A y tenga la B:

$$P(\text{Exactamente } 1) = \frac{20}{90} + \frac{20}{90} = \frac{4}{9} = 0.44444$$

Que tenga las dos características es que tenga A y B a la vez:

$$P(\text{Exactamente } 2) = P(A \cap B) = \frac{1}{9} = 0.1111$$

2. Los productos que al menos no tienen ninguna característica son todos, ya que al menos ninguna es tener ninguna, tener una o tener dos.

$$P(\text{Al menos } 0) = P(\Omega) = 1$$

Los productos que al menos tienen una característica son los que tienen la A o tienen la B, o tienen las dos, es decir, son los que están en el conjunto $A \cup B$.

$$P(\text{Al menos } 1) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{5}{9} = 0.5555$$

Observar la diferencia entre este caso y el caso de tener exactamente una de las características del apartado anterior. Aquí sí cuentan los productos de $A \cap B$ por que tener al menos 1 implica tener 1 ó 2.

Los productos que tienen al menos dos características coinciden con los que tienen exactamente dos, ya que al menos dos implica dos o más, pero no hay ninguno que tenga más de dos.

$$P(\text{Al menos } 2) = P(A \cap B) = \frac{1}{9} = 0.1111$$

3. No más de ninguna característica tienen los productos que no estén ni en A ni en B.

$$P(\text{No más de } 0) = P(\text{Exactamente } 0) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9} = 0.4444$$

No más de una es ninguna o una:

$$P(\text{No más de } 1) = P(\text{Exactamente } 0) + P(\text{Exactamente } 1) = \frac{4}{9} + \frac{4}{9} = \frac{8}{9} = 0.8888$$

No más de dos es ninguna, una o dos, es decir, todos:

$$P(\text{No más de } 2) = P(\Omega) = 1$$

Problema 1.4 *** *En una bolsa hay 30 tornillos y 20 puntas. Extraemos tres unidades una tras otra.*

1. *Hallar la probabilidad de que el tercer elemento sea un tornillo.*
2. *Hallar la probabilidad de que el tercer elemento sea un tornillo si en cada extracción devolvemos el elemento si es un tornillo, apartándolo en caso contrario.*
3. *En el mismo supuesto anterior, hallar la probabilidad de que los tres elementos sean iguales.*

Solución

1. Teniendo en cuenta los siguientes sucesos:

$T_i = \{\text{Extraer tornillo en la extracción } i\}$.

$P_i = \{\text{Extraer puntilla en la extracción } i\}$.

El proceso de extracción de los tornillos y las puntillas se muestra en la figura 1.8.

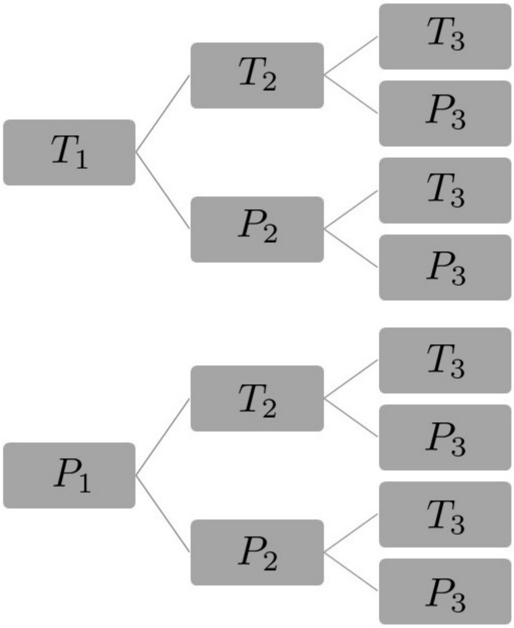

Figura 1.8 Proceso de extracción de los tornillos y puntillas. Problema 1.4.

La probabilidad que nos piden es la de obtener un tornillo en la tercera extracción, $P(T_3)$. Observando la figura 1.8, se ven que hay las siguientes opciones mutuamente excluyentes ya que si pasa un caso no puede pasar otro:

Por lo tanto, se suman las probabilidades de cada caso:

$$P(T_3) = P(T_1 \cap T_2 \cap T_3) + P(T_1 \cap P_2 \cap T_3) + P(P_1 \cap T_2 \cap T_3) + P(P_1 \cap P_2 \cap T_3)$$

Por la regla de la multiplicación se tiene que:

$$P(T_1 \cap T_2 \cap T_3) = P(T_1)P(T_2 \mid T_1)P(T_3 \mid (T_1 \cap T_2))$$

$$P(T_1) = \frac{30}{50}$$

$$P(T_2 \mid T_1) = \frac{29}{49}$$

$$P(T_3|T_1 \cap T_2) = \frac{28}{48}$$

Por tanto, $P(T_1 \cap T_2 \cap T_3) = \frac{30}{50}\frac{29}{49}\frac{28}{48} = 0.2071$.

$$P(T_1 \cap P_2 \cap T_3) = P(T_1)P(P_2 \mid T_1)P(T_3 \mid (T_1 \cap P_2))$$

$$P(T_1) = \frac{30}{50}$$

$$P(P_2 \mid T_1) = \frac{20}{49}$$

$$P(T_3|T_1 \cap P_2) = \frac{29}{48}$$

Por tanto, $P(T_1 \cap P_2 \cap T_3) = \frac{30}{50}\frac{20}{49}\frac{29}{48} = 0.1479$

$$P(P_1 \cap T_2 \cap T_3) = P(P_1)P(T_2 \mid P_1)P(T_3 \mid (P_1 \cap T_2))$$

$$P(P_1) = \frac{20}{50}$$

$$P(T_2 \mid P_1) = \frac{30}{49}$$

$$P(T_3|P_1 \cap T_2) = \frac{29}{48}$$

Por tanto, $P(P_1 \cap T_2 \cap T_3) = \frac{20}{50}\frac{30}{49}\frac{29}{48} = 0.1479$

$$P(P_1 \cap P_2 \cap T_3) = P(P_1)P(P_2 \mid P_1)P(T_3 \mid (P_1 \cap P_2))$$

$$P(P_1) = \frac{20}{50}$$

$$P(P_2 \mid P_1) = \frac{19}{49}$$

$$P(T_3|P_1 \cap P_2) = \frac{30}{48}$$

Por tanto, $P(P_1 \cap P_2 \cap T_3) = \frac{20}{50}\frac{19}{49}\frac{30}{48} = 0.0969$ Sustituyendo se tiene que la probabilidad pedida es $P(T_3) = 0.2071 + 0.1479 + 0.1479 + 0.0969 = 0.5998$.

2. Nos vuelven a pedir la misma probabilidad. Sin embargo, en el caso de que se sacase un tornillo en la primera o en la segunda extracción, tendría que ser devuelto. Hay que plantear la misma expresión del apartado anterior pero con probabilidades diferentes:

$$P(T_3) = P(T_1 \cap T_2 \cap T_3) + P(T_1 \cap P_2 \cap T_3) + P(P_1 \cap T_2 \cap T_3) + P(P_1 \cap P_2 \cap T_3)$$

Por la regla de la multiplicación se tiene que:

$$P(T_1 \cap T_2 \cap T_3) = P(T_1)P(T_2 \mid T_1)P(T_3 \mid (T_1 \cap T_2))$$

$$P(T_1) = \frac{30}{50}$$

$$P(T_2 \mid T_1) = \frac{30}{50}$$

$P(T_3|T_1 \cap T_2) = \frac{30}{50}$ ya que se devuelven los dos tornillos de las primeras extracciones.

Por tanto, $P(T_1 \cap T_2 \cap T_3) = \left(\frac{30}{50}\right)^3 = 0.216$

$$P(T_1 \cap P_2 \cap T_3) = P(T_1)P(P_2 \mid T_1)P(T_3 \mid (T_1 \cap P_2))$$

$$P(T_1) = \frac{30}{50}$$

$$P(P_2 \mid T_1) = \frac{20}{50}$$

$P(T_3|T_1 \cap P_2) = \frac{30}{49}$ ya que se devuelve el tornillo y se aparta la puntilla.

Por tanto, $P(T_1 \cap P_2 \cap T_3) = \frac{30}{50}\frac{20}{50}\frac{30}{49} = 0.147$

$$P(P_1 \cap T_2 \cap T_3) = P(P_1)P(T_2 \mid P_1)P(T_3 \mid (P_1 \cap T_2))$$

$$P(P_1) = \frac{20}{50}$$

$$P(T_2 \mid P_1) = \frac{30}{49}$$

$P(T_3|P_1 \cap T_2) = \frac{30}{49}$ ya que se aparta la puntilla y se devuelve el tornillo.

Por tanto, $P(P_1 \cap T_2 \cap T_3) = \frac{20}{50}\frac{30}{49}\frac{30}{49} = 0.1499$

$$P(P_1 \cap P_2 \cap T_3) = P(P_1)P(P_2 \mid P_1)P(T_3 \mid (P_1 \cap P_2))$$

$$P(P_1) = \frac{20}{50}$$

$$P(P_2 \mid P_1) = \frac{19}{49}$$

$P(T_3|P_1 \cap P_2) = \frac{30}{48}$ ya que se apartan las dos puntillas, no se devuelve nada.

Por tanto, $P(P_1 \cap P_2 \cap T_3) = \frac{20}{50}\frac{19}{49}\frac{30}{48} = 0.097$

Sustituyendo $P(T_3) = 0.216 + 0.147 + 0.1499 + 0.097 = 0.6099$.

3. En este caso, teniendo en cuenta el mismo supuesto del apartado 2, nos piden la probabilidad de que los tres elementos extraídos sean iguales, es decir, la probabilidad de que los elementos extraídos sean o bien todos tornillos o bien todos puntillas:

$$P[(T_1 \cap T_2 \cap T_3) \cup (P_1 \cap P_2 \cap P_3)]$$

Puesto que ambos casos son mutuamente excluyentes, la probabilidad queda:

$$P[(T_1 \cap T_2 \cap T_3)] + P[(P_1 \cap P_2 \cap P_3)]$$

Por la regla de la multiplicación, hallando las probabilidades de la misma forma que antes, se tiene que :

$$p = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{18}{48} \cdot \frac{19}{49} \cdot \frac{20}{50} = 0.2741$$

Problema 1.5 **** Una caja I contiene dos piezas buenas y una pieza defectuosa. Una segunda caja II contiene tres piezas buenas y dos defectuosas.*

1. *Se traslada una pieza de I a II y a continuación se extrae una pieza de II que resulta ser buena. Calcular la probabilidad de que la pieza trasladada fuera buena.*

2. *Suponiendo que en lugar de una, se trasladan simultáneamente dos piezas de I a II, y que la pieza extraída de II es defectuosa. ¿Cuál es la probabilidad de que de las dos piezas trasladadas hubiese exactamente una defectuosa?*

Solución

1. Sean los siguientes sucesos:

$T_B = \{\text{Trasladar una pieza buena}\}$

$T_D = \{\text{Trasladar una pieza defectuosa}\}$

$E_B = \{\text{Extraer una pieza buena}\}$

$E_D = \{\text{Extraer una pieza defectuosa}\}$

La figura 1.9 muestra el proceso de traslado de las diferentes piezas, mostrando el estado de las cajas tras el traslado de una pieza.

Sabemos que:

$$P(T_B) = \frac{2}{3}$$

$$P(T_D) = \frac{1}{3}$$

Notar que T_B y T_D son exhaustivos y mutuamente excluyentes.

$$P(E_B|T_B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

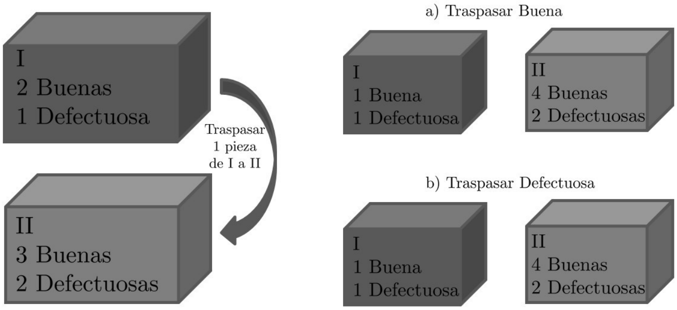

Figura 1.9 Primer caso en el proceso de traslado de las piezas. Problema 1.5.

$$P(E_B|T_D) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Nos piden $P(T_B|E_B)$, así que por la definición de probabilidad condicionada tenemos que

$$P(T_B|E_B) = \frac{P(T_B \cap E_B)}{P(E_B)}$$

Por el teorema de la probabilidad total podemos hallar $P(E_B)$:

$$P(E_B) = P(E_B|T_B) \cdot P(T_B) + P(E_B|T_D) \cdot P(T_D) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{11}{18}$$

Para hallar la intersección usamos la probabilidad condicionada contraria, es decir $P(E_B|T_B) = \frac{P(T_B \cap E_B)}{P(T_B)}$, entonces:

$$P(T_B \cap E_B) = P(E_B|T_B) \cdot P(T_B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

Así, tenemos que

$$P(T_B|E_B) = \frac{P(T_B \cap E_B)}{P(E_B)} = \frac{4}{9} \cdot \frac{18}{11} = \frac{8}{11} = 0.7272$$

(Notar que lo que hemos hecho en realidad es aplicar la fórmula de Bayes)

2. Definimos los nuevos sucesos:

$T_{BB} = \{\text{Trasladar dos piezas buenas}\}$

$T_{BD} = \{\text{Trasladar una pieza buena y una defectuosa}\}$

Ahora el proceso de traslado de piezas es diferente. La figura 1.10 muestra el resultado de las cajas tras los diferentes casos de traslados.

Como es imposible extraer dos piezas defectuosas, T_{BB} y T_{BD} son exhaustivos y mutuamente excluyentes.

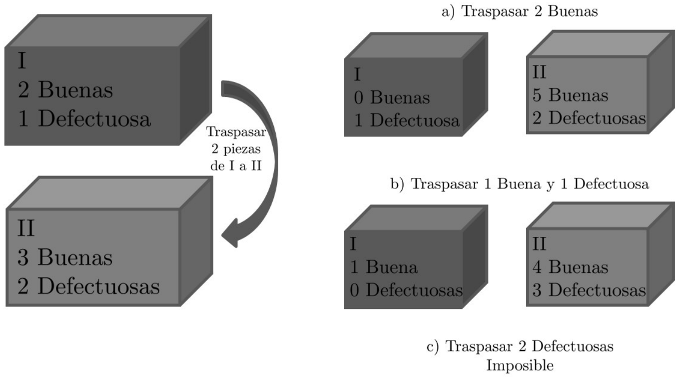

Figura 1.10 Segundo caso en el proceso de la traslado de las piezas. Problema 1.5.

Definimos $T_{B_i} = \{\text{Traslado } i \text{ de una pieza buena}\}$ y $T_{D_i} = \{\text{Traslado } i \text{ de una pieza defectuosa}\}$:

$$P(T_{BB}) = P(T_{B_1} \cap T_{B_2}) = P(T_{B_1})P(T_{B_2}|T_{B_1}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} P(T_{BD}) &= P(T_{B_1} \cap T_{D_2}) + P(T_{D_1} \cap T_{B_2}) = \\ &= P(T_{B_1})P(T_{D_2}|T_{B_1}) + P(T_{D_1})P(T_{B_2}|T_{D_1}) = \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

En los dos casos estamos haciendo lo mismo, ya que, como vimos, las combinaciones sin repetición son probabilidades condicionadas a lo que pase antes.

Son directas las siguientes probabilidades:

$$P(E_D|T_{BB}) = \frac{2}{7}$$

$$P(E_D|T_{BD}) = \frac{3}{7}$$

Nos están pidiendo la probabilidad de que haya una defectuosa en el traslado sabiendo que hemos extraído una defectuosa, es decir, $P(T_{BD}|E_D)$.

Por la definición de probabilidad condicionada, tenemos que

$$P(T_{BD}|E_D) = \frac{P(T_{BD} \cap E_D)}{P(E_D)}$$

Por el teorema de la probabilidad total podemos hallar $P(E_D)$:

$$P(E_D) = P(E_D|T_{BB}) \cdot P(T_{BB}) + P(E_D|T_{BD}) \cdot P(T_{BD}) = \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{21}$$

Igual que antes, por Bayes, se tiene,

$$P(T_{BD}|E_D) = \frac{P(E_D|T_{BD}) \cdot P(T_{BD})}{P(E_D)} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{8}{21}} = \frac{3}{4} = 0.75$$

Problema 1.6 ***** La mayoría de fenómenos físicos se miden empleando pruebas cuya fiabilidad no es total. Así, se emplea informalmente el concepto de 'falso positivo' si la prueba arroja un resultado positivo (detecta el fenómeno) cuando en realidad dicho fenómeno no tiene lugar. De forma análoga, se habla de 'falso negativo' si la prueba arroja un resultado negativo (no detecta el fenómeno) cuando en realidad dicho fenómeno sí tiene lugar.*
Suponga un determinado fenómeno que se da con una probabilidad p y que se mide con una prueba cuyas probabilidades de 'falso positivo' y 'falso negativo' son α y β, respectivamente. Se pide:

1. *Probabilidad de que la prueba detecte el fenómeno si éste ocurre en realidad.*
2. *Probabilidad de que el fenómeno no ocurra y la prueba lo detecte.*
3. *Probabilidad de que el fenómeno no ocurra y la prueba no lo detecte.*
4. *Probabilidad de que la prueba detecte el fenómeno.*
5. *Probabilidad de que no ocurra el fenómeno en realidad aunque la prueba lo ha detectado.*

Solución
Si denotamos por $A := \{$Tiene lugar el fenómeno físico$\}$, y por $B := \{$ La prueba detecta el fenómeno físico$\}$, se tiene que las probabilidades dadas en el enunciado son:

$$P(B|\overline{A}) = \alpha$$

$$P(\overline{B}|A) = \beta$$

Por otro lado, del enunciado se tiene que $P(A) = p$ (y por lo tanto $P(\overline{A}) = 1 - p$)

1. Se pide $P(B|A) = 1 - P(\overline{B}|A) = 1 - \beta$
2. Se pide $P(B \cap \overline{A}) = P(B|\overline{A}) \cdot P(\overline{A}) = \alpha \cdot (1 - p)$
3. Se pide $P(\overline{B} \cap \overline{A}) = P(\overline{B}|\overline{A}) \cdot P(\overline{A}) = (1 - \alpha) \cdot (1 - p)$
4. Se pide $P(B) = P(B|A) \cdot P(A) + P(B|\overline{A}) \cdot P(\overline{A}) = (1 - \beta) \cdot p + \alpha \cdot (1 - p)$
5. Se pide $P(\overline{A}|B) = \frac{P(B|\overline{A}) \cdot P(\overline{A})}{P(B)} = \frac{\alpha(1-p)}{(1-\beta) \cdot p + \alpha \cdot (1-p)}$

Problema 1.7 ***** Un modelo de avión que sale de la línea de ensamblado debe realizar dos pruebas funcionales A y B. El avión tiene una probabilidad p de superar la prueba funcional A y, si la supera, la probabilidad de superar la prueba B es de p_1. Si no supera la prueba A, la probabilidad de superar la prueba B es de p_2. Se pide:*

1. *Probabilidad de que el modelo supere las pruebas A y B.*

2. *Probabilidad de que supere la prueba B.*
3. *Probabilidad de que haya superado la prueba A sabiendo que superó la prueba B.*
4. *Probabilidad de que no supere ni la prueba A ni la prueba B.*

Solución

Si denotamos por $A :=$ {El avión supera la prueba funcional A}, y por $B :=$ {El avión supera la prueba funcional B}, se tiene que las probabilidades dadas en el enunciado son:

$$P(A) = p$$

$$P(B|A) = p_1$$
$$P(B|\overline{A}) = p_2$$

1. Se pide $P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = p \cdot p_1$
2. Se pide $P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\overline{A})P(\overline{A}) = p \cdot p_1 + (1-p)p_2$
3. Se pide $P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{p \cdot p_1}{p \cdot p_1 + (1-p)p_2}$
4. Se pide $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{B}|\overline{A})P(\overline{A}) = (1-p)(1-p_2)$

Problema 1.8 **** En el aeropuerto de Sevilla, se sabe que la probabilidad de que haya niebla si la temperatura bajó de los* $0\,^\circ$C *la noche anterior es de 0.8. Si la temperatura no baja de* $0\,^\circ$C*, dicha probabilidad se reduce a 0.01.*

La probabilidad de que la temperatura baje de cero grados por la noche en el aeropuerto de Sevilla es de 0.02.

Finalmente, se sabe que la probabilidad de que un vuelo despegue cuando hay niebla y la temperatura bajó de 0ºC es 0.3.

1. *¿Cuál es la probabilidad de que esta mañana haya niebla y anoche la temperatura haya bajado de cero grados?*
2. *¿Cuál es la probabilidad de que no haya niebla si la temperatura bajó de cero grados? ¿y de que no haya niebla si la temperatura no bajó de cero grados?*
3. *Hallar la probabilidad de que un vuelo despegue, haya niebla y la temperatura baje de los 0ºC.*
4. *Calcular la probabilidad de que haya niebla.*
5. *Probabilidad de que haya hecho menos de cero grados si al día siguiente hubo niebla.*
6. *Probabilidad de que haya hecho más de cero grados si al día siguiente no hubo niebla.*

Solución

Sea $A =$ {Hay niebla} y $B =$ {La temperatura bajó de cero grados}. Tenemos que $P(B) = 0.02$ y la probabilidad de que haya niebla si la temperatura bajó de cero grados: $P(A \mid B) = 0.8$

1. La probabilidad de que baje la temperatura de cero grados y haya niebla al día siguiente: $P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B) = 0.8 \cdot 0.02 = 0.016$.
2. Nótese que $P(A \mid B)$ y $P(A \mid \overline{B})$ no tienen por qué sumar 1. Tenemos que la probabilidad de que haya niebla si la temperatura bajó de cero grados es $P(A \mid B) = 0.8$ y si la temperatura no bajó de cero grados es $P(A \mid \overline{B}) = 0.01$. Por lo tanto,
$$P(\overline{A} \mid B) = 1 - P(A \mid B) = 1 - 0.8 = 0.2$$
$$P(\overline{A} \mid \overline{B}) = 1 - P(A \mid \overline{B}) = 1 - 0.01 = 0.99$$
3. Sea $C = \{\text{un vuelo despega}\}$
$$P(A \cap B \cap C) = P(C \mid A \cap B)P(A \mid B)P(B) = 0.3 \cdot 0.8 \cdot 0.02 = 0.0048$$
4. $P(A) = P(A \mid B)P(B) + P(A \mid \overline{B})P(\overline{B}) = 0.8 \cdot 0.02 + 0.01 \cdot 0.98 = 0.016 + 0.0098 = 0.0258$.
5. $$P(B \mid A) = \frac{P(A \mid B)P(B)}{P(A)} = \frac{0.8 \cdot 0.02}{0.0258} = 0.62$$
6. $$P(\overline{B} \mid \overline{A}) = \frac{P(\overline{A} \mid \overline{B})P(\overline{B})}{P(\overline{A})} = \frac{0.99 \cdot 0.98}{1 - 0.0258} = \frac{0.9702}{0.9742} = 0.9959$$

1.7 Material adicional Tema 1

1.7.1 El concurso de Monty Hall

El concurso (más o menos). En un concurso televisivo, hay tres puertas. Tras una de ellas hay un coche. El concursante debe elegir una puerta para ganar lo que hay tras ella. Tras elegirla, el presentador abre una de las otras dos puertas, mostrando que no hay nada tras ella (esto es, el presentador no abre una puerta al azar, sino que abre una tras la que no hay nada). Hecho esto, el presentador le da al concursante la posibilidad de cambiar su elección inicial (y por tanto elegir la puerta cerrada no seleccionada inicialmente).

Bajo estas condiciones, es posible demostrar que, estadísticamente, las probabilidades de ganar el coche son mayores si el concursante cambia su elección inicial que si no lo hace.

La respuesta corta. El que el coche esté tras la puerta elegida por el concursante tiene una probabilidad de $\frac{1}{3}$. El suceso complementario (que el coche no esté tras la puerta elegida) tiene una probabilidad de $\frac{2}{3}$. Antes de que el presentador abra una puerta (*no una puerta al azar, sino la que no tiene el coche detrás*), los $\frac{2}{3}$ se repartian por igual entre las dos puertas no elegidas. Al abrir la que no tiene el coche, estas probabilidades ya no se reparten por igual, sino que están todas en la puerta que no se ha abierto. Por tanto, la probabilidad de que el coche esté tras la puerta no seleccionada y no abierta es de $\frac{2}{3}$.

La respuesta larga. Consideremos los siguientes eventos:

$C_i :=$ { El coche se halla tras la puerta i}
$E_i :=$ { El concursante elige la puerta i}
$P_i :=$ { El presentador abre la puerta i}

Sin pérdida de generalidad, le asignamos el número 1 a la puerta que ha elegido el concursante, y 3 a la puerta que abre el presentador. En tal caso, la probabilidad de que el coche esté en la puerta 2 (la no elegida inicialmente) es $P(C_2|E_1 \cap P_3)$. Aplicando la definición de probabilidad condicionada:

$$P(C_2|E_1 \cap P_3) = \frac{P(C_2 \cap E_1 \cap P_3)}{P(E_1 \cap P_3)} \tag{1.1}$$

El numerador $P(C_2 \cap E_1 \cap P_3)$ puede escribirse como $P(E_1 \cap P_3 \cap C_2) = P(E_1 \cap P_3|C_2) \cdot P(C_2)$. El denominador $P(E_1 \cap P_3)$ puede desarrollarse usando la probabilidad total $P(E_1 \cap P_3) = \sum_{i=1}^{3} P(E_1 \cap P_3|C_i) \cdot P(C_i)$. Es claro que $P(C_i) = \frac{1}{3}$, por lo que para calcular la expresión (1.1) solo nos hace falta hallar $P(E_1 \cap P_3|C_i)$:

- $P(E_1 \cap P_3|C_1) = \frac{1}{2}$, ya que si el concursante eligió la puerta 1, el presentador (que sabe que el coche está tras la puerta 1) podrá abrir la puerta 2 o la puerta 3 con idéntica probabilidad.
- $P(E_1 \cap P_3|C_2) = 1$, ya que si el concursante eligió la puerta 1, el presentador (que sabe que el coche está tras la puerta 2) abrirá con total seguridad la puerta 3.
- $P(E_1 \cap P_3|C_3) = 0$, ya que si el concursante eligió la puerta 1, el presentador (que sabe que el coche está tras la puerta 3) no abrirá nunca la puerta 3.

Sustituyendo en (1.1):

$$P(C_2|E_1 \cap P_3) = \frac{P(E_1 \cap P_3|C_2) \cdot P(C_2)}{\sum_{i=1}^{3} P(E_1 \cap P_3|C_i) \cdot P(C_i)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \tag{1.2}$$

1.7.2 Reflexión sobre la probabilidad condicionada

Se sabe que uno de cada 5 alumnos de la ETSI estudia el Grado de Ingeniería Aeroespacial (GIA).

1. **Si se coge un alumno de la ETSI al azar ¿Cuál es la probabilidad de que sea de GIA?**

   Es claro que la probabilidad es del 20 %. Si denotamos por $G_i :=$ {El alumno i es de GIA}, se tiene que $P(G_i) = \frac{1}{5}$.

2. **Si se coge al azar un grupo de cinco alumnos de la ETSI, ¿Cuál es la probabilidad de que cada uno de ellos sea de GIA?**

   Es claro que la probabilidad es del 20 % para cada uno de ellos, con independencia de si al que se le ha preguntado anteriormente es de GIA o no. Si denotamos por $G_i :=$ {El alumno i del grupo es de GIA}, se tiene que $P(G_i) = \frac{1}{5}$.

3. **Si se coge al azar un grupo de cinco alumnos de la ETSI y tras preguntarle al primero, se tiene que éste es de GIA, ¿Cuál es la probabilidad de que el siguiente al que se le pregunta sea de GIA?**

   Nuevamente, dicha probabilidad es del 20 %, ya que se trata de sucesos independientes (al estar escogidos al azar, el grado de un alumno no condiciona al de otro). Formalmente:

$$P(G_2|G_1) = \frac{P(G_1 \cap G_2)}{P(G_1)} = \frac{P(G_1) \cdot P(G_2)}{P(G_1)} = P(G_2) = \frac{1}{5}$$

   Nótese que, aunque hay un conocimiento adicional (el primer alumno es de GIA), dicho conocimiento no afecta a las probabilidades de G_2 al ser sucesos independientes.

4. **Si se coge al azar un grupo de cinco alumnos de la ETSI, ¿Cuál es la probabilidad de que el primer alumno del grupo de cinco sea de GIA y el resto no?**

   Denotando por $G_i := \{\text{El alumno } i \text{ del grupo de cinco es de GIA}\}$, se pide la probabilidad del suceso $G_1 \cap \overline{G_2} \cap \overline{G_3} \cap \overline{G_4} \cap \overline{G_5}$:

$$P(G_1 \cap \overline{G_2} \cap \overline{G_3} \cap \overline{G_4} \cap \overline{G_5}) = P(G_1) \cdot P(\overline{G_2}) \cdot P(\overline{G_3}) \cdot P(\overline{G_4}) \cdot P(\overline{G_5}) = \frac{1}{5}\frac{4}{5}\frac{4}{5}\frac{4}{5}\frac{4}{5}$$

5. **Si se coge al azar un grupo de cinco alumnos de la ETSI, ¿Cuál es la probabilidad de que uno (y solo uno) del grupo sea de GIA?**

   Denotando por $S_i := \{i \text{ de los alumnos del grupo de 5 es de GIA}\}$, se tiene que la probabilidad que se pide, $P(S_1)$), es la de la unión de los siguientes sucesos (disjuntos):

$$G_1 \cap \overline{G_2} \cap \overline{G_3} \cap \overline{G_4} \cap \overline{G_5}$$

$$\overline{G_1} \cap G_2 \cap \overline{G_3} \cap \overline{G_4} \cap \overline{G_5}$$

$$\cdots$$

$$\overline{G_1} \cap \overline{G_2} \cap \overline{G_3} \cap \overline{G_4} \cap G_5$$

   Nótese que cada una de las probabilidades anteriores son iguales, y además, como son sucesos disjuntos la probabilidad pedida es la suma de todas ellas. O, de otra manera, la probabilidad de una de ellas por el número de casos en los que puede tener lugar. Por ello, la probabilidad pedida es:

$$P(S_1) = 5\frac{1}{5}(\frac{4}{5})^4$$

   Nótese que la probabilidad del suceso 'un alumno cualquiera de los cinco es de GIA' no es la misma que la del suceso 'el primer alumno de los cinco es de GIA'. La última es más restrictiva, ya que impone que, de los cinco alumnos, precisamente el primero es el que es de GIA.

6. Si se coge al azar un grupo de cinco alumnos de la ETSI y se sabe que, de ellos, dos son alumnos de GIA, ¿Cuál es la probabilidad de que el primero al que se le pregunta sea de GIA?

En este caso, la probabilidad de que el alumno sea de GIA ya no es del 20 %. Intuitivamente, parece razonable pensar que la probabilidad será mayor del 20 % (hay más alumnos de GIA en el grupo de los que aparentemente les correspondería).

Nótese que la probabilidad ha cambiado por el hecho de tener información adicional, incluso aunque dicha información adicional no esté directamente relacionada con el alumno en concreto. Efectivamente, ahora se tiene un grupo de 5 alumnos de los que 2 son de GIA, por lo que la probabilidad de que uno de ellos lo sea es de $\frac{2}{5}$.

Obviando la intuición anterior, con arreglo a la notación vista, se nos pide la siguiente probabilidad:

$$P(G_1|S_2) = \frac{P(G_1 \cap S_2)}{P(S_2)}$$

La probabilidad de $G_1 \cap S_2$ es la de la unión de los siguientes sucesos disjuntos:

$$G_1 \cap G_2 \cap \overline{G_3} \cap \overline{G_4} \cap \overline{G_5}$$

$$G_1 \cap \overline{G_2} \cap G_3 \cap \overline{G_4} \cap \overline{G_5}$$

$$G_1 \cap \overline{G_2} \cap \overline{G_3} \cap G_4 \cap \overline{G_5}$$

$$G_1 \cap \overline{G_2} \cap \overline{G_3} \cap \overline{G_4} \cap G_5$$

Como en el caso anterior, las probabilidades de cada uno de los sucesos anteriores son iguales y equivalen a las distintas formas de ordenar cuatro elementos (el resto de los cuatro alumnos), de los que tres son de un tipo (no son de GIA) y el restante de otro tipo (es de GIA). Dicho número de formas es: $\binom{4}{1}$. Cada una de estas formas tiene la probabilidad $(\frac{1}{5})^2(\frac{4}{5})^3$. Por tanto:

$$P(G_1 \cap S_2) = \binom{4}{1}\left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3$$

Respecto al denominador, se tiene que hay $\binom{5}{2}$ formas posibles de que hay dos alumnos de GIA (y tres no). Cada una de estas formas tiene la probabilidad $(\frac{1}{5})^2(\frac{4}{5})^3$. Por tanto:

$$P(S_2) = \binom{5}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3$$

Así pues:

$$P(G_1|S_2) = \frac{P(G_1 \cap S_2)}{P(S_2)} = \frac{\binom{4}{1}(\frac{1}{5})^2 \cdot (\frac{4}{5})^3}{\binom{5}{2}(\frac{1}{5})^2(\frac{4}{5})^3} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

Lo que coincide con el cálculo anterior.

7. Si se coge al azar un grupo de cinco alumnos de la ETSI y, tras preguntar al primero, éste es de GIA, ¿Cuál es la probabilidad de que haya otro alumno de GIA en el grupo?

Nuevamente, el conocimiento de información modifica las probabilidades originales (sin información). Sin información, la probabilidad de que haya dos alumnos de GIA en el grupo ya se ha calculado en un apartado anterior. Pero intutivamente vemos que el hecho de que el primero ya sea alumno de GIA aumenta las probabilidades de que haya dos alumnos en total. De hecho, la probabilidad que se pide es la del suceso 'hay uno (y solo uno) alumno de GIA en los cuatro alumnos restantes del grupo'. Dicha probabilidad se puede calcular como: $\binom{4}{1}\frac{1}{5}(\frac{4}{5})^3$ y, como puede verse, es mayor que la anterior.

Sin emplear la intuición anterior, sino haciéndolo mediante la definición de probabilidad condicionada, se tendría:

$$P(S_2|G_1) = \frac{P(S_2 \cap G_1)}{P(G_1)} = \frac{\binom{4}{1}(\frac{1}{5})^2 \cdot (\frac{4}{5})^3}{\frac{1}{5}} = \binom{4}{1}\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^3$$

con lo que vemos que arroja el resultado anterior.

Una tercera forma de calcular la probabilidad anterior nos permite reflexionar sobre la relación entre dos condicionamientos. Así:

$$P(S_2|G_1) = \frac{P(S_2 \cap G_1)}{P(G_1)} = \frac{P(G_1|S_2) \cdot P(S_2)}{P(G_1)}$$

Todas las probabilidades anteriores ya han sido calculadas, por lo que, sustituyendo, se tiene que:

$$P(S_2|G_1) = \frac{\frac{2}{5}\binom{5}{2}(\frac{1}{5})^2(\frac{4}{5})^3}{\frac{1}{5}} = \frac{2}{5}\binom{5}{2}\frac{1}{5}(\frac{4}{5})^3 = \binom{4}{1}\frac{1}{5}(\frac{4}{5})^3$$

Lo que nuevamente nos lleva al mismo resultado. En este caso, ha sido posible calcular fácilmente tanto $P(S_2|G_1)$ como $P(S_1|G_2)$. No obstante, en general, será más dificil calcular una de las dos, y el método anterior nos proporcionará un método para relacionarlas. El hecho de que ambas probabilidades estén relacionadas es coherente con nuestra intuición: si la ocurrencia de un suceso A afecta a la probabilidad de que suceda B, lo contrario debe suceder también.