

INTRODUCCIÓN A LA INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

COLECCIÓN: MONOGRAFÍAS DE ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA

DIRECTOR DE LA COLECCIÓN

Rodríguez Rubio, Francisco. Universidad de Sevilla

CONSEJO DE REDACCIÓN

Arahal Junco, Consuelo. Universidad de Sevilla.
Carballar Rincón, Alejandro. Universidad de Sevilla.
Limón Marruedo, Daniel. Universidad de Sevilla.
Madero Ayora, María José. Universidad de Sevilla.
Rodríguez Luis, Alejandro José. Universidad de Sevilla.
Rodríguez Rubio, Francisco. Universidad de Sevilla.
Salas Gómez, Francisco. Universidad de Sevilla.

COMITÉ CIENTÍFICO

Aracil Santonja, Javier. Universidad de Sevilla y Universidad de Málaga
Bernelli Zazzera, Franco. Politecnico di Milano
Chinesta, Francisco. École Centrale de Nantes
Félez Mindan, Jesús. Universidad Politécnica de Madrid
Gallego Sevilla, Rafael. Universidad Politécnica de Madrid
García-Lomas Jung, Francisco Javier. Universidad de Sevilla
Giner Maravilla, Eugenio. Universidad Politécnica de Valencia
González Díez, Isabel. Universidad de Sevilla
Montañés García, José Luis. Universidad Politécnica de Madrid
Montes Martos, Juan Manuel. Universidad de Sevilla
Navarro Esteve, Pablo José. Universidad Politécnica de Valencia.
Ollero de Castro, Pedro. Universidad de Sevilla
Verdú, Sergio. Princeton University

José David Canca Ortiz
Gabriel Villa Caro

INTRODUCCIÓN A LA INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES



SEVILLA 2021

Serie: Ingeniería
Colección: Monografías de la Escuela Técnica Superior de Ingeniería
de la Universidad de Sevilla
Núm.: 14

COMITÉ EDITORIAL:

Araceli López Serena
(Directora de la Editorial Universidad de Sevilla)
Elena Leal Abad
(Subdirectora)
Concepción Barrero Rodríguez
Rafael Fernández Chacón
María Gracia García Martín
Ana Ilundáin Larrañeta
María del Pópulo Pablo-Romero Gil-Delgado
Manuel Padilla Cruz
Marta Palenque Sánchez
María Eugenia Petit-Breuilh Sepúlveda
José-Leonardo Ruiz Sánchez
Antonio Tejedor Cabrera

Reservados todos los derechos. Ni la totalidad ni parte de este libro puede reproducirse o transmitirse por ningún procedimiento electrónico o mecánico, incluyendo fotocopia, grabación magnética o cualquier almacenamiento de información y sistema de recuperación, sin permiso escrito de la Editorial Universidad de Sevilla.

© Editorial Universidad de Sevilla 2021
C/ Porvenir, 27 - 41013 Sevilla.
Tlfs.: 954 487 447; 954 487 451; Fax: 954 487 443
Correo electrónico: eus4@us.es
Web: <<http://www.editorial.us.es>>

© José David Canca Ortiz
Gabriel Villa Caro 2021

Impreso en papel ecológico
Impreso en España-Printed in Spain

ISBN 978-84-472-1935-3
Depósito Legal: SE 326-2021

Diseño de cubierta: Santi García. santi@elmaquetador.es
Maquetación: David Canca
Impresión: Kadmos

Prefacio

En numerosas circunstancias, en el ámbito de las competencias de un profesional con capacidad de gestión, es necesario realizar una elección entre numerosas opciones con el fin de encontrar la mejor solución posible a un determinado problema. Pensemos por ejemplo en el ámbito industrial y en problemas de selección de personal, programación de turnos de trabajo, nivel de producción a desarrollar durante un determinado periodo de tiempo, diseño de rutas de distribución de productos, secuencia en que se realizan los trabajos para crear un determinado producto, etc. En todos estos casos, entendemos que la mejor solución (solución óptima) se refiere a aquella que proporciona el mejor valor de acuerdo a un cierto criterio que se ha fijado a priori (la solución de mínimo coste, la solución de mínimo consumo de energía, la que maximiza los beneficios...). Este tipo de problemas se denominan problemas de toma de decisiones y la rama de las matemáticas que proporciona una metodología para su estudio y resolución se denomina Investigación Operativa (Operations Research o Operational Research en lengua inglesa). Los problemas de decisión que podemos encontrarnos en la industria son de diferente naturaleza y la Investigación Operativa los aborda empleando en cada caso las técnicas que mejor se adapten al problema en cuestión. Este texto se dedica al estudio de problemas lineales de optimización (Programación Lineal) y su aplicación a redes (Programación Lineal en Grafos) así como a estudiar problemas en los que las variables que representan las decisiones tienen naturaleza discreta (programación Entera).

El desarrollo de la Investigación Operativa ha sido clasificado como uno de los avances científicos más importantes del siglo XX. Los modelos de programación lineal son muy usados en Ingeniería por su sencillez para abordar una gran variedad de problemas de toma de decisiones. Su utilización ha permitido a empresas y organizaciones obtener importantes beneficios en un entorno cada vez más competitivo. De esta forma, múltiples compañías han encontrado en la programación lineal una herramienta útil y sencilla para solucionar problemas complejos como por ejemplo el cálculo de las cantidades de productos a fabricar durante cierto periodo de tiempo (con el fin de obtener el máximo beneficio) o la mejor selección de proveedores desde un punto de vista económico.

De acuerdo a su definición académica, la investigación de Operaciones, «Operations Research», debe entenderse como «El análisis matemático o científico de la eficiencia y la

mejora de la mano de obra, maquinaria, equipos y políticas usadas en operaciones gubernamentales, militares o comerciales». Esta definición resulta extremadamente genérica, pero deja entrever que la Investigación de Operaciones no es en sí misma una ciencia, sino que se trata de una disciplina que aplica la ciencia y el desarrollo tecnológico para resolver problemas de diferente naturaleza caracterizados por la participación humana.

Muchos de los primeros investigadores en esta disciplina se habían formado como matemáticos, físicos y estadísticos. Algunos otros provenían de campos aparentemente poco relacionados como la química, la psicología o el derecho. El éxito de esta disciplina científica, especialmente a partir de la Segunda Guerra Mundial, permite caracterizar a los pioneros como personas con una alta preparación, motivación, capaces de enfrentarse a problemas reales y difíciles que no habían sido abordados hasta entonces.

La urgencia por disponer de técnicas de resolución de problemas en el ámbito militar durante la Segunda Guerra Mundial sirvió de base al desarrollo de un equipo multidisciplinar encabezado por P. M. S. Blackett y Philip M. Morse [Chal1], que afrontaron diferentes problemas dando origen al campo que hoy denominamos Investigación de Operaciones.

Blackett y Morse aplicaron el método científico al estudio de problemas operacionales de una manera diferente a como los precursores de la ciencia de la gestión Fredrick Taylor y Frank y Lillian Gilbreth hicieron en el ámbito industrial de principios del siglo XX. Estos investigadores partían de recopilar datos reales medidos en las fábricas para posteriormente sugerir mejoras o procedimientos que permitieran incrementar la eficiencia de los procesos. Sin embargo, Blackett y Morse propusieron un enfoque diferente, basado en la modelización de la realidad y en la evaluación sistemática de alternativas frente a una o varias medidas de eficiencia de las mismas.

Finalizada la Segunda Guerra Mundial, la investigación de operaciones se enriqueció con aportaciones de otras disciplinas procedentes de las universidades y de la industria. Los conceptos propios de la Investigación de Operaciones se vieron ampliados por nuevas ideas y técnicas tomadas de las matemáticas, la estadística y econometría, así como de otros campos afines a la actividad industrial. En 1947, en EEUU se formó un grupo de trabajo dedicado a mejorar los procesos de planificación a gran escala: el proyecto SCOOP (Scientific Computation Of Optimum Programs). En dicho grupo se encontraba trabajando George Bernard Dantzig, que desarrolló en 1947 el algoritmo Simplex.

La Investigación de Operaciones encontró un amplio apoyo en las universidades norteamericanas, que se vio reforzado por el desarrollo de los computadores digitales. En esos años comenzó también a impartirse su docencia en formación reglada en algunas universidades. En la década de los 50 la Investigación de Operaciones evoluciona hacia una profesión, conformándose las primeras sociedades nacionales del área, junto al nacimiento de revistas especializadas y departamentos académicos específicos en el ámbito académico. En 1955 se crea la Federación Internacional de Sociedades de Investigación Operativa (*International Federation of Operational Research Societies* IFORS).

Actualmente la Investigación de Operaciones se utiliza a nivel mundial tanto en organizaciones públicas como privadas, además de ser un área activa de investigación académica. Las aplicaciones reales de la Investigación de Operaciones para la resolución de problemas

son enormes, a modo de resumen se comentan a continuación algunos de los campos más frecuentes:

- Planificación de personal.
- Investigación y Desarrollo en la Industria. Planificación de la producción y gestión de operaciones – Scheduling.
- Planificación de sistemas de transporte.
- Localización. Diseño de redes eléctricas, de abastecimiento de agua, de transporte, etc.
- Determinación y optimización de políticas de precios (Revenue Management).
- Gestión Logística (diseño y planificación de actividades en las cadenas de suministro).
- Servicios Financieros (clasificación de riesgo, marketing, operaciones internas).
- Administraciones públicas (despliegue de servicios de emergencia, planificación de personal, eficiencia en los servicios, etc.).

Un listado actualizado de casos de éxito en la aplicación de las técnicas de la Investigación de Operaciones se puede consultar directamente desde el sitio web de INFORMS (Institute for Operations Research and the Management Sciences) – <https://www.informs.org/Sites/Getting-Started-With-Analytics/Analytics-Success> –. Una revisión detallada de la evolución histórica de la Investigación de Operaciones puede encontrarse en – <http://www.orms-today.org/orms-10-02/frhistorysb1.html> – y en el libro de Gass y Assad “An Annotated Timeline of Operations Research: An Informal History” [Ass05].

En la actualidad, la Investigación de Operaciones sigue siendo un campo de trabajo para miles de investigadores en todo el mundo. Todos los años se celebran numerosas conferencias internacionales y nacionales auspiciadas por las respectivas sociedades de investigación que acogen aspectos específicos de esta disciplina, bien centrados en las técnicas de resolución de problemas o en sus aplicaciones a casos reales. Sirvan, a modo de ejemplo, algunas de las revistas internacionales propias de la disciplina:

Journal of Operations Management, Omega, Operations Research, Management Science, Surveys in Operations Research and Management Science, Manufacturing and Service Operations Management, Transportation Research, Series B: Methodological, International Journal of Production Economics, Production and Operations Management, Computers and Operations Research, European Journal of Operational Research, Transportation Research, Part E: Logistics and Transportation Review, Transportation Research, Part A: Policy and Practice, Transportation Research Part C: Emerging Technologies, Journal of Business Logistics, Mathematics of Operations Research, INFORMS Journal on Computing, Journal of Scheduling, Operations-Research-Spektrum, Journal of Heuristics, Naval Research Logistics, Socio-Economic Planning Sciences, Journal of Optimization Theory and Applications, Quality and Reliability Engineering International, Annals of Operations Research, Journal of the Operational Research Society, Public Transport, Production Planning and Control, Journal of Management in Engineering - ASCE, Operations Research Letters, Interfaces...

Este libro nace con la idea de servir como introducción al campo de la investigación de operaciones. Está dirigido principalmente a estudiantes de Ingeniería que requieren un balance entre conocimientos teóricos y prácticos. El texto puede ser usado como manual para la docencia en varias asignaturas, adaptando su contenido a la carga lectiva de las mismas. La primera parte del libro resulta de utilidad en asignaturas que presentan la Programación Lineal, siendo indicado para cursos de aproximadamente 45 horas lectivas. La segunda parte, capítulos 5 al 8, complementa lo visto en los primeros cuatro capítulos y junto a ellos configuran una asignatura extensa de Programación Lineal de entre 60 y 70 horas lectivas.

La tercera parte, capítulos 9 al 14 puede servir como base para un curso dedicado de forma exclusiva a programación entera, incluyendo aspectos de modelado y software para la resolución de problemas de optimización. El capítulo 14 puede usarse no obstante como parte final de los cursos anteriores, Programación Lineal y Programación Lineal Extendida, permitiendo a los lectores disponer de conocimientos para resolver problemas de tamaño real.

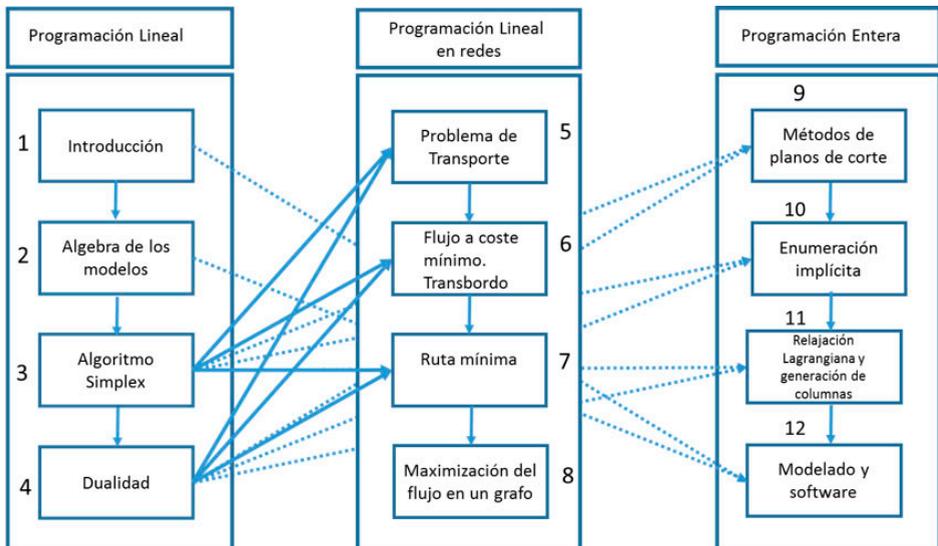
Estructura del Libro

El primer capítulo se dedica a una introducción sobre los modelos de optimización. Se desarrollan dos ejemplos con el fin de diferenciar modelos lineales y no lineales. Se presentan las hipótesis básicas de un modelo lineal y se lleva a cabo, a partir de un ejemplo, una descripción de la geometría de este tipo de problemas. Se presenta el resultado fundamental de la programación lineal aprovechando la convexidad de la región de soluciones admisibles y la linealidad de la función que sirve como objetivo para la búsqueda de soluciones. Se trata de un capítulo básico que permite al lector entender las características geométricas fundamentales de este tipo de problemas y que ayudará a generalizar las situaciones descritas cuando el número de variables a considerar crezca. El capítulo finaliza con la formulación de las condiciones geométricas de óptimo, expresando las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker [Kar39], [Tuc51] como una generalización de la Lagrangiana para determinar el óptimo en un modelo lineal de optimización.

El segundo capítulo describe las relaciones algebraicas de un modelo lineal de optimización. El contenido del capítulo permite resolver algebraicamente un problema de optimización, explicando paso a paso, apoyado por una representación gráfica del problema, el mecanismo iterativo de búsqueda del óptimo. Es base para el capítulo tercero, en el que se presenta el algoritmo Simplex. En muchos textos de programación lineal, se comienza directamente por el tercer capítulo, obviando el procedimiento detallado de transformaciones lineales del sistema de inequaciones descrito por las restricciones del modelo. Entendemos, sin embargo, que la explicación del funcionamiento del algoritmo Simplex se ve enriquecida si se realiza una aproximación al mismo a partir de las relaciones algebraicas de las restricciones, tal y como se presenta en este capítulo.

El capítulo tercero expone de forma estructurada los diferentes aspectos tratados en el capítulo segundo, dando forma al algoritmo Simplex. Se resuelven algunos aspectos no tratados anteriormente como la selección de una solución inicial al problema. El capítulo incluye una versión matricial del método Simplex, más cercana a la que se

implementaría en un ordenador, obviando un número elevado de operaciones no necesarias en la transformación lineal de las restricciones del modelo.



En el capítulo cuarto se presentan las bases de la teoría de la dualidad entre problemas lineales. Es un capítulo fundamental que posteriormente permitirá diseñar algoritmos eficientes para la resolución de numerosos problemas de optimización. Muchos de los aspectos tratados en el tema serán usados posteriormente en los capítulos dedicados a problemas de optimización en grafos. El estudio de este capítulo debe basarse en un dominio razonable del material expuesto en el capítulo precedente. El estudio de la dualidad en programación lineal es uno de los aspectos clave del libro. Este capítulo cierra el bloque temático de programación lineal general. Los conocimientos adquiridos hasta el momento se usan en los temas siguientes para el estudio de diferentes problemas que pueden ser modelados usando grafos. El capítulo presenta también el algoritmo Simplex Dual, apropiado en ciertos problemas en los que inicialmente se parte de una solución no admisible en el problema original pero admisible en su dual, normalmente como consecuencia de la modificación a posteriori de alguna de las restricciones del problema original (situación que se presenta de forma común al tratar de resolver problemas de tipo entero cuando se incorporan restricciones de planos de corte). Finalmente se incluye la base teórica de la familia de técnicas de tipo Primal-Dual, métodos que partiendo de una solución admisible dual son capaces de realizar iteraciones sucesivas hasta alcanzar el óptimo del problema.

Los capítulos cinco al ocho, inclusive, abordan problemas lineales sobre grafos. La utilización de grafos ha sido una constante en la modelización de ciertos problemas de toma de decisiones. En el ámbito real de la ingeniería, muchas situaciones resultan susceptibles de ser representadas en forma de grafos. Algunas por su propia naturaleza, por ejemplo los problemas de diseño de redes de infraestructuras, telecomunicaciones y transportes. Otras gracias a la abstracción del problema, por ejemplo en situaciones

en que se desea llevar a cabo la planificación de un proyecto o en problemas donde el tiempo constituye un factor esencial y una representación tipo evento-actividad facilita su modelado. Se estudia el problema de transporte, el problema de diseño de rutas mínimas, la distribución de productos a través de una red en la que ciertos nodos actúan como productores y otros como centros de demanda y finalmente se analiza la máxima capacidad de un grafo para el envío de productos o de información. Cada capítulo se centra en uno de los problemas mencionados, si bien, en alguno de ellos se realizan transformaciones que afectan a problemas anteriormente vistos, sirviendo de repaso y proponiendo técnicas alternativas de resolución.

La última parte de este texto se dedica a la programación matemática con variables enteras. El capítulo noveno presenta las técnicas de planos de corte. El capítulo décimo se dedica a presentar técnicas de enumeración implícita. Finalmente el capítulo undécimo presenta algunas extensiones a fin de abordar problemas de gran tamaño con estructura singular.

El libro finaliza con un capítulo dedicado a facilitar al lector la habilidad para plantear problemas de optimización en diferentes contextos y presentar una panorámica de los recursos disponibles para la resolución de los mismos mediante el uso del ordenador.

La mayoría de los capítulos incluyen ejercicios propuestos, relacionados con el capítulo específico o incorporando aspectos relativos a los conceptos estudiados en capítulos anteriores. De ésta manera que lector podrá ir relacionando los conceptos que de forma progresiva se van presentando a lo largo del texto.

Índice

<i>Prefacio</i>	I
<i>Índice</i>	VII
1 Introducción y geometría de los modelos lineales de optimización	1
1.1 Problemas de optimización. Ejemplos	1
1.2 Hipótesis de los modelos lineales	7
1.2.1 Proporcionalidad	7
1.2.2 Divisibilidad	7
1.2.3 Aditividad	8
1.2.4 Certidumbre	8
1.3 Formulación general de un problema de optimización	8
1.3.1 Comentarios sobre los modelos de los ejemplos 1.1.1 y 1.1.2	9
1.4 Resolución del ejemplo 1.1.1	13
1.5 La geometría de los modelos lineales	14
1.5.1 Restricciones	14
1.5.2 Región de admisibilidad, vértices y convexidad	16
1.6 Resultado fundamental de la programación lineal	18
1.7 Otros ejemplos lineales	19
1.7.1 Caso A. Problema incompatible	19
1.7.2 Caso B. Problema con región no acotada	21
1.7.3 Caso C. Problema con región no acotada y solución no acotada	21
1.7.4 Caso D. Problema con múltiples soluciones óptimas	22
1.8 Condición geométrica de óptimo	23
1.9 Comentarios finales	27
1.10 Ejercicios	28
2 El álgebra de los modelos lineales	29
2.1 Variables de holgura. Significado	29
2.2 Forma típica o estándar de un modelo lineal	32
2.3 Forma canónica de un modelo lineal	32

2.4	Soluciones básicas y su equivalencia con vértices de la región de admisibilidad	33
2.4.1	Equivalencia entre soluciones básicas y vértices	35
2.5	Cambio de solución básica	37
2.6	Condiciones de optimalidad	43
2.7	Obtención de la forma típica o estándar	47
2.8	Comentarios	51
2.9	Ejercicios	53
3	El método Simplex	55
3.1	Introducción	55
3.2	Forma tabular del Simplex	55
3.3	Cambio de base y búsqueda del óptimo	57
3.4	Ecuaciones generales.	63
3.5	Obtención de la forma canónica	63
3.6	Degeneración	70
3.7	Simplex revisado o matricial	76
3.8	Comentarios	80
3.9	Ejercicios	83
4	Dualidad en programación lineal	87
4.1	Introducción	87
4.2	Ejemplo de modelos duales	87
4.3	Definición de dualidad (Formas asimétrica y simétrica)	92
4.4	Regla nemotécnica para formular problemas Duales	95
4.5	Propiedades de los problemas duales	97
4.5.1	Acotación de la función objetivo	97
4.5.2	Propiedad de las soluciones óptimas duales	98
4.6	Resultados fundamentales de la dualidad	98
4.6.1	En base a la acotación de la función objetivo	98
4.6.2	Vector solución del dual	100
4.7	Relaciones de complementariedad (Forma asimétrica)	102
4.7.1	Complementariedad fuerte	103
4.8	Relaciones entre variables óptimas de los problemas duales	104
4.9	Interpretación económica del vector óptimo dual. Ejemplo	109
4.10	Algoritmo Simplex dual	113
4.11	Algoritmo Primal-Dual	120
4.12	Comentarios	126
4.13	Ejercicios	127
5	El Problema de Transporte	135
5.1	Introducción	135
5.2	Representación tabular	139
5.3	Simplificación de datos	140
5.3.1	Tratamiento de la Función Objetivo	140
5.3.2	Tratamiento de las Restricciones	140
5.4	Integridad de las Soluciones	144
5.5	Transformación a un Modelo General de Redes	146

5.6	Soluciones Básicas Iniciales	151
5.6.1	Método del Rincón Noroeste	152
5.6.2	Método de los Costes Mínimos	154
5.6.3	Método de Vogel	155
5.6.4	Método de Russell.	157
5.7	Cálculo de los costes relativos	164
5.8	Cambio de Solución Básica	170
5.9	Degeneración	175
5.10	Restricciones de desigualdad en producciones y demandas	179
5.11	Rutas prohibidas	181
5.12	Variables acotadas en transporte. Restricciones de capacidad en arcos	184
5.13	Comentarios	192
5.14	Ejercicios	193
6	El Problema de Transbordo (Flujo a coste mínimo)	201
6.1	Introducción	201
6.2	El modelo PRIMAL de transbordo	202
6.3	El modelo DUAL de transbordo	203
6.4	Reformulación como un problema de transporte	203
6.5	Resolución de un ejemplo	207
6.6	El algoritmo Simplex en redes	210
6.7	Comentarios	220
6.8	Ejercicios	221
7	El Problema de Ruta Mínima	223
7.1	Introducción	223
7.2	El modelo PRIMAL de ruta mínima	223
7.3	El modelo DUAL de ruta mínima	224
7.4	Reformulación como un problema de transporte	225
7.5	El algoritmo Simplex en ruta mínima	227
7.6	El algoritmo de Dijkstra en redes ordenadas de forma creciente	232
7.7	El algoritmo de Dijkstra en grafos no ordenados de forma creciente	239
7.8	Comentarios	241
7.9	Ejercicios	242
8	El Problema de Flujo Máximo en un grafo	243
8.1	Introducción	243
8.2	El modelo PRIMAL de flujo máximo	244
8.3	El modelo DUAL	245
8.4	Conceptos	247
8.5	El algoritmo de Ford-Fulkerson	250
8.6	Resolución de un ejemplo	251
8.7	Comentarios	263
8.8	El método Primal-Dual para problemas de transporte	263
8.9	Ejercicios	275
9	Programación Entera. Planos de corte	277
9.1	Introducción	277

9.2	Métodos de Planos de Corte	278
9.2.1	Clasificación.	278
9.3	Método Dual Todo-Entero	279
9.4	Método Primal Todo-Entero	285
9.5	Método Dual Mixto	291
9.6	Comentarios finales	297
9.7	Ejercicios	298
10	Programación Entera. Branch and Bound	303
10.1	Introducción	303
10.2	Comentarios	307
10.3	Algoritmo de Land-Doig	307
10.4	Problemas binarios puros. Algoritmo de Balas	314
10.4.1	Primera aproximación	314
10.4.2	Algunos comentarios sobre las estrategias de búsqueda	318
10.4.3	Pre-procesamiento del problema	319
10.4.4	Método de Balas	321
10.5	Problemas binarios mixtos. Combinando con el Simplex	327
10.6	Branch and Bound para problemas con estructura. El problema del viajante de comercio	329
10.7	Comentarios finales	335
10.8	Ejercicios	336
11	Relajación Lagrangiana y generación de columnas	345
11.1	Introducción	345
11.2	El método del subgradiente para la actualización de multiplicadores	354
11.3	La técnica de generación de columnas	359
11.4	Comentarios	368
12	Construcción de modelos lineales de optimización	371
12.1	Introducción	371
12.2	Modelos en Programación Matemática	372
12.3	Construcción de un modelo lineal	373
12.4	Programación lineal entera	373
12.5	El uso habitual de las variables enteras	374
12.6	Algunas relaciones frecuentes	375
12.6.1	Relaciones entre una variable continua y una variable auxiliar	375
12.6.2	Uso de variables auxiliares en el modelado de costes de setup	376
12.6.3	Series mínimas de fabricación	376
12.6.4	Uso de variables auxiliares para activar o desactivar restricciones	377
12.6.5	Regiones no convexas	380
12.6.6	Restricciones disyuntivas	383
12.6.7	Objetivos de tipo MinMax y MaxMin	383
12.6.8	Valores absolutos en las restricciones	384
12.6.9	Valores absolutos en la función objetivo	387

12.6.10	Aproximación lineal de una función no lineal	390
12.6.11	Modelando implicaciones lógicas sencillas	392
12.6.12	Linealización del producto de variables	393
12.6.13	Desviación respecto de un objetivo. Goal programming	394
12.6.14	Restricciones de precedencia	395
12.6.15	Trabajos no interrumpibles	396
12.6.16	Usando matrices de datos para facilitar la construcción de un modelo	397
12.6.17	Funciones no convexas. Descuentos	398
12.7	Software para construir modelos (Algebraic Modeling Languages)	402
12.7.1	AIMMS	403
12.7.2	AMPL	404
12.7.3	Fico Xpress y MOSEL	405
12.7.4	GAMS	405
12.7.5	GMPL (GNU MathProg Language) y Gusek (Una alternativa GNU)	408
12.7.6	IBM Ilog OPL y Cplex Studio	409
12.7.7	Lingo (Lindo Systems)	409
12.7.8	Pyomo/COOPR	413
12.7.9	Solver y Risk Solver Premium (Frontline Systems)	413
12.7.10	SolverStudio for Excel	414
	<i>Índice de Figuras</i>	417
	<i>Índice de Tablas</i>	423
	<i>Bibliografía</i>	429
	<i>Índice alfabético</i>	433