Alberto Márquez Pérez

Teoría de grafos: una herramienta para pensar

LECCIÓN INAUGURAL
DE LA E.T.S. DE INGENIERÍA DE EDIFICACIÓN
UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Curso académico 2024-2025

Teoría de grafos:
una herramienta para pensar

Alberto Márquez Pérez
Departamento de Matemática Aplicada I
Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Edificación

Teoría de grafos: una herramienta para pensar

Lección inaugural leída en la apertura
del curso académico 2024-2025
en la Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Edificación.
Universidad de Sevilla

Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Edificación

EDITORIAL UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Sevilla 2024

Colección: Textos institucionales
Núm.: 120

Porvenir, 27 - 41013 Sevilla.
Tlfs.: 954 487 447; 954 487 451; Fax: 954 487 443
Correo electrónico: info-eus@us.es
Web: https://editorial.us.es

ISBN: 978-84-472-2755-6
DOI: https://dx.doi.org/10.12795/9788447227556

Maquetación y realización electrónica:
Editorial Universidad de Sevilla

Índice

Señor Director del Secretariado de Relaciones Institucionales de la Universidad de Sevilla.
Señora Directora de la Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Edificación de la Universidad de Sevilla.
Señora Directora general de la Agencia de la Vivienda y Rehabilitación de Andalucía.
Señora Comisaria del proyecto «Sevilla 2029» para
la conmemoración del Centenario de
la Exposición Iberoamericana de 1929.
Señor Presidente del Consejo Andaluz de Colegios Profesionales Aparejadores y Arquitectos Técnicos.
Autoridades Académicas,
Profesorado,
Personal de Administración y Servicios,
Alumnos,
Señoras y Señores.

Consideraciones iniciales

En primer lugar, me gustaría, de todo cerebro (mi corazón solo emite sangre), agradecer al equipo directivo de mi Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Edificación de la Universidad de Sevilla el que se me brinde la oportunidad de impartir esta lección inaugural. A continuación, y como una nota aclaratoria, comunico que he querido escoger citas de un libro que me parece imprescindible: el *Juan de Mairena*[1] de nuestro paisano Antonio Machado. Así puede que consiga dar algo de fuste a esta lección. Aunque, evidentemente, no todo lo que se dice en dicho texto es aplicable en este caso.

1. Aclaración: Salvo indicación contraria, todas las citas incluidas en este texto, y que se reconocen fácilmente porque van sistemáticamente sangradas y en cursiva, corresponden al libro *Juan de Mairena* de Antonio Machado. La edición que se ha manejado es la publicada por Cátedra en dos volúmenes en 1986, cuya ortografía se ha respetado.

Por ejemplo, me parece inapropiado e inexacto copiar a Mairena en la siguiente cita:

> *Juan de Mairena hacía advertencias demasiado elementales a sus alumnos. No olvidemos que éstos eran muy jóvenes, casi niños, apenas bachilleres; que Mairena colocaba en el primer banco de su clase a los más torpes, y que casi siempre se dirigía a ellos.*

Más bien, me identifico con este otro texto:

> *[Alumno]: —Nadie menos autorizado que yo para dirigiros la palabra: mi ingenio es nulo; mi ignorancia, casi enciclopédica. Encomiéndome, pues, a vuestra indulgencia... ¿Qué digo indulgencia? ¡A vuestra misericordia!*
>
> *La clase. —¡Bien!*
>
> *Mairena. —No se achique usted tanto [...]. Agrada la modestia, pero no el propio menosprecio.*

Y creo que ya es el momento de centrarnos en el objeto de esta lección. Como bien dice la cita anterior, mi ignorancia es casi enciclopédica, pero ya desde el principio de mi vida académica he tratado de disimular dicha falta. Para ello había que especializarse en alguna disciplina, por lo que, dadas mis limitaciones, me pareció adecuado escoger el estudio de uno de los entes matemáticos más sencillos: la teoría de grafos.

Cuando el saber se especializa, crece el volumen total de la cultura. Esta es la ilusión y el consuelo de los especialistas. ¡Lo que sabemos entre todos! ¡Oh, eso es lo que no sabe nadie!

Aun siendo una de las estructuras matemáticas más simples, los grafos han probado ser una poderosa herramienta en muchos campos del saber, no limitándose su utilidad a la propia matemática. Gran parte de su potencia radica en el hecho de que permiten modelizar multitud de situaciones en una gran variedad de problemas. Cuando un representante de la dirección de nuestra escuela me dio la alegría de comunicarme la tarea de preparar esta lección inaugural, con mucho tacto, me vino a decir que no me anduviera demasiado por las ramas. Este es el temor que suscitamos los matemáticos: que a veces hablamos de cosas que solo nosotros entendemos. Lo que ignora el resto de la humanidad, aunque puede que lo sospeche, es que, a veces, tampoco nosotros mismos nos entendemos. Pero voy a tratar de concentrarme en lo que quiero mostrar en el día de hoy.

Un grafo se compone de dos elementos: los vértices (simplemente un conjunto cualquiera) y las aristas (algunos pares de vértices). Es normal, aunque no obligatorio, que representemos los vértices como puntos del plano y las aristas como segmentos que unen los vértices adecuados. Esta estructura tan simple permite modelizar relaciones humanas, asignaciones de tareas, calles y cruces de una ciudad o dependencias y puertas, entre ellas de una vivienda, y otras muchas situaciones. Y si dotamos a las aristas de ciertas propiedades geométricas y físicas, podemos estar ante la configuración de las vigas de un edificio (volveremos a ellas más adelante), carreteras o un sistema de canalización de aguas residuales de una ciudad, por citar algunos ejemplos.

> *Lo corriente en el hombre es la tendencia a creer verdadero cuanto le reporta alguna utilidad. Por eso hay tantos hombres capaces de comulgar con ruedas de molino.*

Un ejemplo motivador (o eso espero)

Pero, sobre todo, o, como resumen de todo lo anterior, interesa lo siguiente: el simple hecho de modelizar de una forma adecuada un problema de la naturaleza, un problema real que se nos presente en cualquier circunstancia, permite pensar y, en muchos casos, resolver dicho problema, a veces de forma sorprendente. La misma persona que me pedía que no me fuera por las ramas, me sugirió que lo que contara tuviera relación con la ingeniería de la edificación. Aunque daré algunos ejemplos más adelante, creo que la principal aplicación es, como he dicho, que los grafos ayudan a pensar. Un ejemplo simple, pero que creo que ilustra muy bien el poder de modelizar usando grafos para resolver problemas, es el siguiente[2]:

2. Este ejemplo y otras muchas aplicaciones de la teoría de grafos se pueden encontrar en el maravilloso libro de divulgación de Clara Grima *En busca del grafo perdido* (Ariel, 2021).

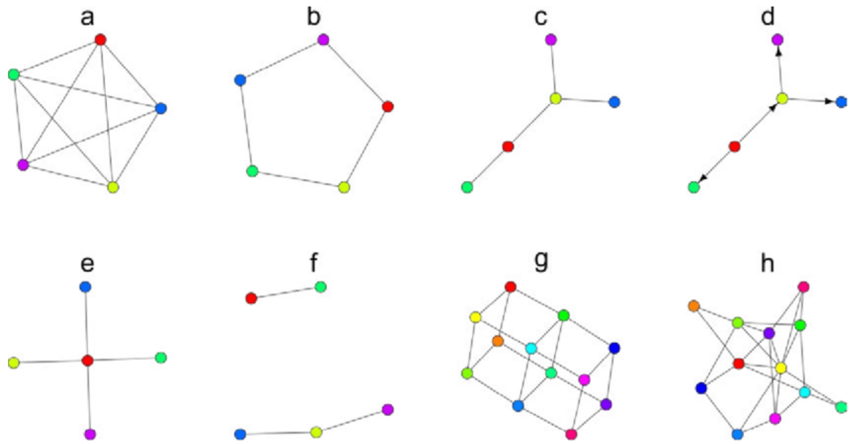


Figura 1: Algunos ejemplos de grafos (o, con mayor propiedad, sus representaciones mediante puntos del plano y segmentos, uniendo aquellos puntos que se corresponden con vértices entre los que existe una arista)

Alicia y Blas son pareja y han quedado para cenar con otras cuatro parejas en un restaurante. Al llegar a la cena, todos llegan con su pareja, los asistentes se saludan al verse: algunos se dan cordialmente la mano, otros se saludan con dos besos. Tras los postres, Blas les propone a sus nueve compañeros de mesa que escriban en un trozo de papel a cuántas personas les dieron la mano al llegar al restaurante. Los compañeros acceden y le dan a él los nueve papeles cada uno con un número. Blas, sin abrirlos, los mezcla y después los abre y los coloca sobre la mesa. Casualmente, las nueve respuestas que obtiene son distintas, no se repite ningún número. La pregunta que nos formulamos es la siguiente: ¿a cuánta gente le dio la mano al llegar Alicia?

Para resolver este acertijo, (y reitero que lo fundamental es entender en qué sentido el mero hecho de modelizar la situación permite resolver el problema), tratemos de representar la cena con un grafo. Los vértices de dicho grafo son cada uno de los comensales, y pondremos una etiqueta a uno de esos vértices identificándolo con Blas. Las etiquetas de los otros vértices serán simplemente las nueve respuestas obtenidas. Pero ¿cuáles eran esas nueve respuestas? Evidentemente, nadie ha saludado a más de nueve amigos (son diez en total). Aún más, nadie ha dado la mano a nueve, porque cada cual llega con su pareja. Así que el número máximo de personas a las que alguien ha dado la mano es ocho. Con lo que ya tenemos, nuestras etiquetas y el grafo que vamos a construir, al menos sus vértices, empezaríamos tal y como muestra la figura 2.

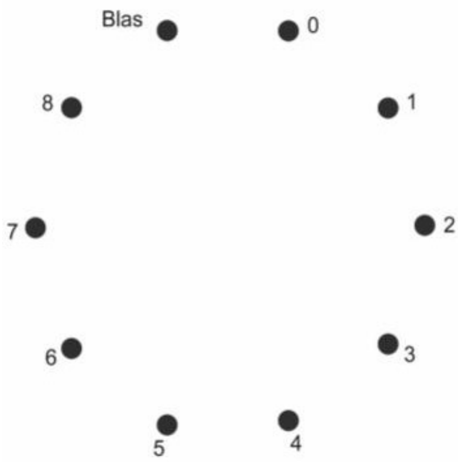


Figura 2. Los participantes en la fiesta con sus correspondientes etiquetas

Decía mi maestro: Pensar es deambular de calle en calleja, de calleja en callejón, hasta dar en un callejón sin salida. Llegados a este callejón pensamos que la gracia estaría en salir de él. Y entonces es cuando se busca la puerta al campo.

En estos momentos lo que correspondería es construir un grafo en el que de cada vértice partieran tantas aristas como indica su etiqueta. Con dicho fin, tratamos de encontrar algún hilo del que tirar. En principio, nos podemos dar cuenta de que de uno de los vértices ya parte el número de aristas que indica su etiqueta: el “0”. A él no pueden llegar más aristas. Pero del “8” deben partir 8 aristas a los nueve vértices restantes y ninguna de dichas aristas puede ir a

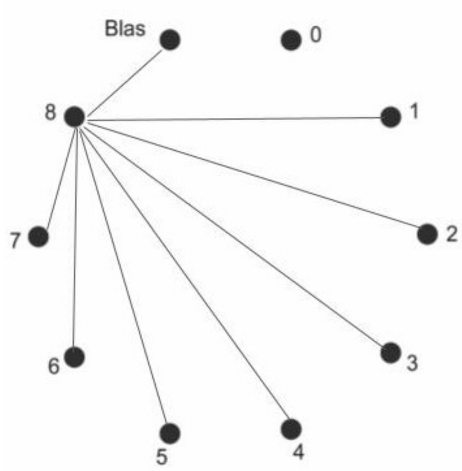


Figura 3. Las aristas que parten de "8"

parar al "0"; luego el grafo con las aristas que parten del "8" tiene que tener el aspecto que se aprecia en la figura 3.

Esto significa que la persona etiquetada con un "8" dio la mano a todos, salvo a la que lleva la etiqueta con un "0". ¿Por qué no le dio la mano a esa persona? Si volvemos a leer el enunciado del acertijo, vemos que existe una razón de peso: nadie saludó a su propia pareja (todas las parejas llegaron juntas); por lo tanto, colegimos (siempre me ha encantado esa palabra) que "8" y "0" constituyen una de las cinco parejas. A continuación, nos preguntamos por las aristas que parten de "7". Ya sabemos que le dio la mano a "8" y que no le dio la mano a "0". Pero, si observamos la figura 3, veremos que hay otro vértice del que ya parten tantas aristas como indica su etiqueta y no es otro que "1". Así que desde "7" ya

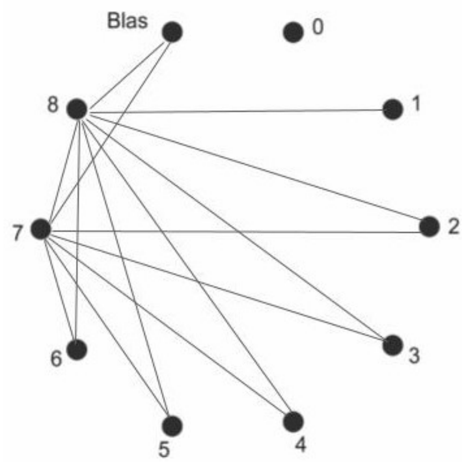


Figura 4. Las aristas que parten de “8” y de “7”

tenemos una arista (la que va a “8”) y dos vértices que ya están «saturados”, por lo que las 6 aristas que nos faltan por asignarle a “7”, deberán ir a los vértices desde el “2” hasta el “6” más otra hasta Blas, obteniéndose una situación como la descrita en la figura 4.

Así que la persona etiquetada con un “7” dio la mano a todos salvo a aquellas con la etiqueta “0” y “1”, pero “0” no puede ser la pareja de “7” porque lo es de “8” (estamos ante unas parejas muy convencionales, al menos en apariencia). Por lo que ahora deducimos que “7” y “1” son pareja.

No quiero ofender la inteligencia del posible público de esta lección y creo que es el momento de utilizar esa expresión tan peligrosa en matemáticas: y así sucesivamente llegamos a la conclusión de que el grafo de los saludos en la fiesta

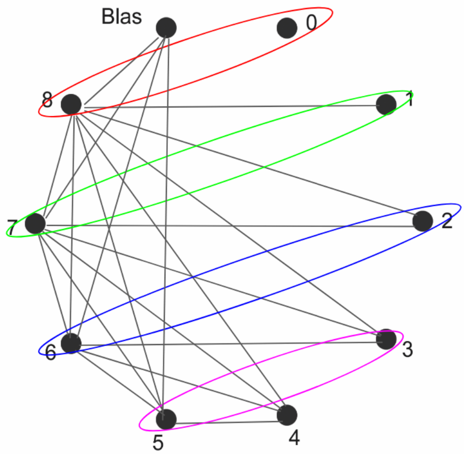


Figura 5. El grafo de las parejas de la fiesta

es justamente el que indica la figura 5, en la que las distintas parejas están señaladas, y vemos que “Blas” y “4” son los que faltan por emparejar, así que “4” ha de ser forzosamente Alicia y, por lo tanto, ella ha dado la mano al llegar a cuatro personas.

> *Pláceme poneros un poco en guardia contra mí mismo. De buena fe os digo cuanto me parece que puede ser más fecundo en vuestras almas, juzgando por aquello que, a mi parecer, fue más fecundo en la mía. Pero ésta es una norma expuesta a múltiples yerros. Si la empleo es por no haber encontrado otra mejor. Yo os pido un poco de amistad y ese mínimo de respeto que hace posible la convivencia entre personas durante algunas horas. Pero no me toméis demasiado en serio. Pensad que no siempre estoy yo seguro de lo que os digo.*

Listado no exhaustivo (ni mucho menos) de aplicaciones de la teoría de grafos

Realmente, me parecería totalmente adecuado concluir aquí esta lección. Creo haber mostrado, con un ejemplo, lo potente que puede llegar a ser el modelizar un problema, usando la teoría de grafos, para intentar resolverlo. Y este ejemplo no es, ni mucho menos, aislado; en multitud de campos se pueden dar situaciones similares. En este sentido, June Huh, medalla Fields en 2022, uno de los mayores galardones que se pueden conseguir en el campo de las matemáticas, ha contado en varias ocasiones que él no era bueno en esta disciplina, su máximo interés era la poesía. Hasta que se encontró un problema en un videojuego de muy difícil resolución (el que aparece en la figura 6), salvo si se convierte todo a teoría de grafos y entonces, de forma casi mágica, aparece la solución. No voy a dar los detalles de ella para

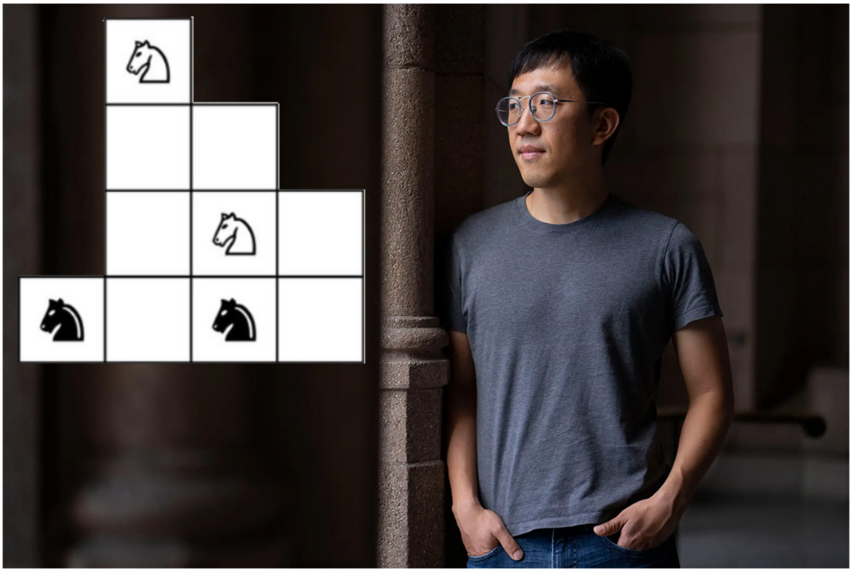


Figura 6. El problema que cambió la vida de Huh (y Huh); se trata de poner los caballos blancos en los lugares de los negros y hacer lo propio con estos

que así mi estimado público tenga un entretenimiento posteriormente. Solo diré que la idea es representar cada casilla de ese peculiar tablero como un vértice de un grafo en el que existe una arista entre dos vértices, siempre que podamos llegar con un salto de caballo de una a otra.

La serie par es la mitad de la serie total de los números.
La serie impar es la otra mitad.
Pero la serie par y la serie impar son ambas infinitas.

La serie total de los números es también infinita. ¿Será entonces doblemente infinita que la serie par y que la serie impar?

No parece aceptable, en buena lógica, que lo infinito pueda duplicarse, como, tampoco, que pueda partirse en mitades.

Luego la serie par y la serie impar son ambas, y cada una, iguales a la serie total de los números.

No es tan claro, pues, como vosotros pensáis, que el todo sea mayor que la parte.

Meditad con ahínco, hasta hallar en qué consiste lo sofístico de este razonamiento.

Y cuando os hiervan los sesos, avisad.

Efectivamente, la primera aplicación de la teoría de grafos es que ayuda a pensar. ¿Cabe más aplicación, una herramienta más útil, que aquella que nos ayuda a pensar? Pero no es menos cierto que su impacto en una disciplina como la ingeniería de la edificación no se limita a algo tan general y así vemos que repasando los contenidos de cualquier curso introductorio de teoría de grafos es fácil comprobar que los *grafos bipartitos* se utilizan para la asignación de tareas (en una obra, por ejemplo), que el *coloreado de vértices* no solo resuelve numerosos problemas de clasificación (como la temporización de tareas, o la elaboración de un horario en un centro como este), sino que también nos ayuda a iluminar o vigilar eficientemente una estancia de planta complicada, tal y como nos mostró brillantemente nuestra compañera la profesora Garrido en otra de estas lecciones inaugurales[3]. Y, a propósito de lecciones inaugurales, en otra de ellas, la profesora Chávez usó de forma magistral la *planaridad de grafos* para diseñar las plantas de un edificio[4]. Las distintas medidas de *centralidad* permiten localizar las zonas más destacadas en cualquier red de comunicación, como puede ser un centro comercial, considerando las distintas zonas y los pasillos que las comunican. La *transversalidad* y los *árboles abarcadores* se usan para encontrar rutas óptimas tanto en edificios, como en ciudades o redes de transporte, facilitando lo que nos decía Mairena:

> *Decía mi maestro: Pensar es deambular de calle en calleja, de calleja en callejón, hasta dar en un callejón sin salida. Llegados a este callejón pensamos que la gracia estaría en salir de él. Y entonces es cuando se busca la puerta al campo.*

---

3. M.ª Ángeles Garrido Vizuete. *Iluminación y vigilancia de museos* (Servicio de Publicaciones de la Universidad de Sevilla, 2011).

4. María José Chávez de Diego. *Un paseo matemático por la técnica y el arte de construir* (Servicio de Publicaciones de la Universidad de Sevilla, 2005).

Rigidez y tensegridad

Pero me gustaría introducir dos conceptos que no suelen aparecer en esos cursos introductorios y que me parecen fascinantes: rigidez y tensegridad.

> *Perdonadme estos terminachos de formación erudita, porque en algo se ha de conocer que estamos en clase, y porque no hay cátedra sin un poco de pedantería.*

Es posible que esos dos temas merezcan ser estudiados en un centro como este y por ello abogo. Aunque entrando en terrenos pedagógicos, me parece oportuno recordar que uno de los padres de la pedagogía, Jean-Jacques Rousseau, tuvo cinco hijos, todos con su pareja de hecho (a la que él mismo describía en términos despectivos) y que todos y cada uno de esos hijos fueron entregados al hospicio según iban naciendo. Lo cual es disculpable, ya que así él pudo escribir sin perturbación *Emilio*, donde explicaba cómo había que educar a los niños y que:

Un gran pedagogo hubo [...], se llamaba Herodes.

Pero volviendo a la rigidez y la tensegridad. Es justo reconocer que, de hecho, se puede considerar que, al contrario de todos los términos mencionados anteriormente, el camino ha venido en la dirección opuesta: desde la ingeniería de la construcción a la teoría de grafos. Puesto que ambas ideas surgieron de arquitectos e ingenieros que las aplicaron en sus construcciones, para después empezar a estudiarse desde el punto de vista de la teoría de grafos, y desde esta han viajado a otras disciplinas.

Según nos dice la Wikipedia: «La tensegridad es un principio estructural basado en el empleo de componentes aislados comprimidos que se encuentran dentro de una red tensada continua, de tal modo que los miembros comprimidos (generalmente barras) no se tocan entre sí y están unidos únicamente por medio de componentes traccionados (habitualmente cables) que son los que delimitan espacialmente dicho sistema». Por si a alguien le ha pasado como a mí, que no ha entendido nada de lo anterior, creo que lo más ilustrativo es mostrarlo con un ejemplo como el de la figura 7. Podemos ver que es un grafo en el que algunas de

Figura 7. Tensegridad en la ETSI de la Universidad de Sevilla

las aristas son rígidas (barras de madera en este caso) y otras no (cables), que por la disposición especial y con la ayuda de la fuerza de la gravedad componen una estructura sorprendente y bella. Con estos principios se han construido torres, puentes, pabellones y otras estructuras.

Con respecto al otro concepto, tal y como su nombre indica, de un grafo planar diremos que es *rígido,* si, dadas dos inmersiones de dicho grafo en el plano, con las mismas longitudes de sus aristas dos a dos, siempre podemos llevar una en la otra mediante un movimiento del plano. En este sentido, un grafo con tres vértices y tres aristas con las longitudes adecuadas (lo que nosotros llamamos un K_3 y el resto de la humanidad un triángulo) siempre será rígido, mientras que un C_4 o cuadrilátero no lo es. Pero para estructuras más complejas la solución no siempre es simple o barata, ya que un recurso para «rigidizar» un grafo puede ser añadir muchas aristas hasta convertir todas las caras en triángulos. Trato de explicarme con un ejemplo:

> Supongamos que se tiene una cuadrícula de vigas (una parrilla). Las vigas son de acero y no pueden estirarse, comprimirse ni doblarse, pero están unidas entre sí mediante articulaciones de pasador (tornillos o similares). En otras palabras, las articulaciones no proporcionan

```
ninguna rigidez a la estructura. Para
hacer que la estructura sea rígida, se
permite añadir vigas transversales de
acero (lo que obligaría a que un rombo
fuera cuadrado). La cuestión es: ¿Dónde
se deben colocar las vigas transversa-
les y cuál es el número mínimo necesario
para estabilizar la estructura?
```

Como se ve, estamos hablando de dinero: de ahorrarnos en vigas transversales y que lo construido tenga las mismas propiedades estructurales (y que pese menos, lo cual no es baladí). Por ejemplo, como nos mostró brillantemente el profesor París Carballo en su lección inaugural de apertura del presente curso académico en la Universidad de Sevilla[5], es deseable que la estructura de la figura 8 no se bambolee en demasía, por razones que supongo que nos alcanzan a todos. Para conseguirlo, al margen de la estructura principal que le daba forma, utilizaron multitud de vigas diagonales. ¿Eran necesarias tantas?

Para ilustrar de lo que estamos hablando, consideremos un conjunto de vigas que forman una cuadrícula 4 × 5, como la que se reproduce más adelante en la figura 9.

5. Federico París Carballo. *Contribuciones de la mecánica estructural al conocimiento* (Editorial Universidad de Sevilla, 2024).

Figura 8. Torre diseñada por los ingenieros Maurice Koechlin y Émile Nouguier y con aportaciones estéticas de Stephen Sauvestre

Evidentemente, dicha estructura no es rígida, como muestra la figura 10. Pero obsérvese en dicha imagen que en cada fila todas las barras verticales son paralelas y en cada columna ocurre lo propio con las aristas o barras verticales. Esta es la clave para resolver si un emparrillado de cualquier tamaño $m \times n$ con unas cuantas barras diagonales es rígido

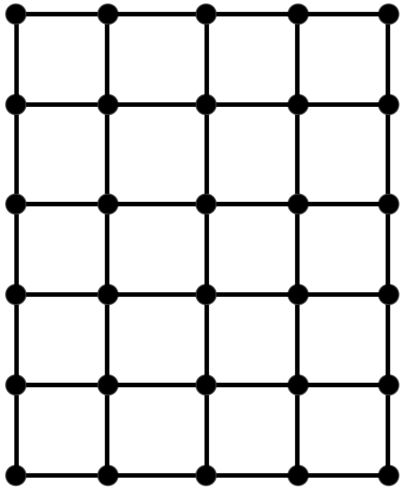


Figura 9. Parrilla 4 × 5

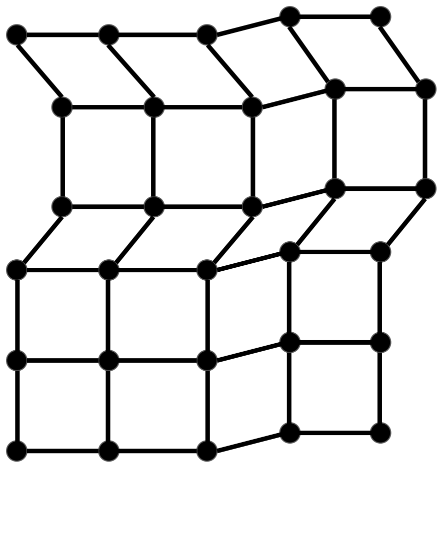


Figura 10. La parrilla 4 × 5
no es rígida

o no, ya que al añadir una barra diagonal forzamos que ese cuadrilátero sea un cuadrado y así hacemos perpendiculares las aristas horizontales de su columna con las verticales de su fila. Luego, si construimos un grafo auxiliar (sí, otro grafo más para resolver un problema en un grafo; lo que viene a ser una metamodelización) con dos conjuntos de vértices, uno por cada fila y uno por cada columna, y unimos dos vértices, si en el cuadrado común a dicha fila y a dicha columna hemos puesto una diagonal, no es difícil de comprobar el siguiente enunciado[6]:

> **Teorema 1** Un grafo parrilla con diagonales en algunos cuadriláteros es rígido si y solo si su grafo auxiliar es conexo[7].

Así, a modo de ejemplo, podemos considerar los dos grafos de la figura 11 y preguntarnos cuál de ellos, si alguno, es rígido.

Para responder a esa pregunta, construimos sus dos grafos auxiliares, que son los mostrados en la figura 12.

---

6. Alguien dijo que no estamos ante un texto de matemáticas si este no contiene un teorema. Posiblemente estaba equivocado.

7. *Conexo* quiere decir que se puede ir de cualquier vértice a cualquier otro usando aristas.

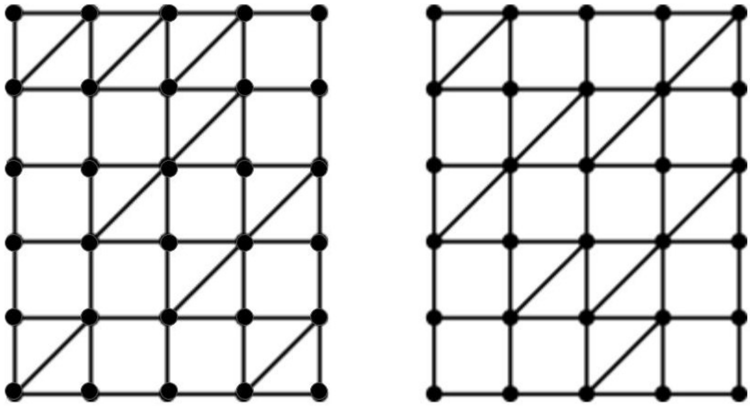


Figura 11. ¿Cuál de estos dos grafos es rígido?

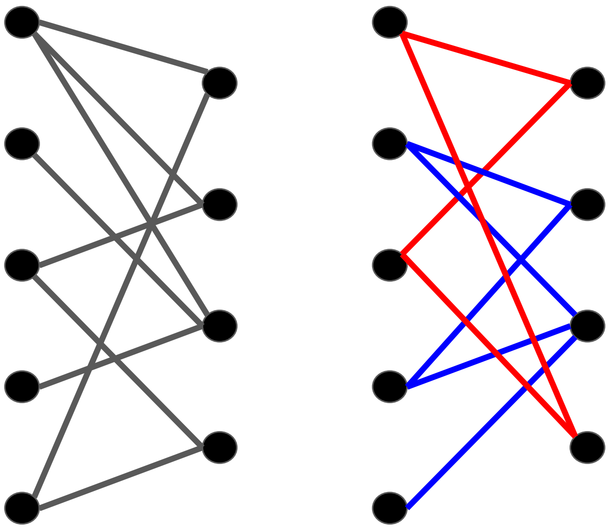


Figura 12. Los dos grafos auxiliares de la figura 11

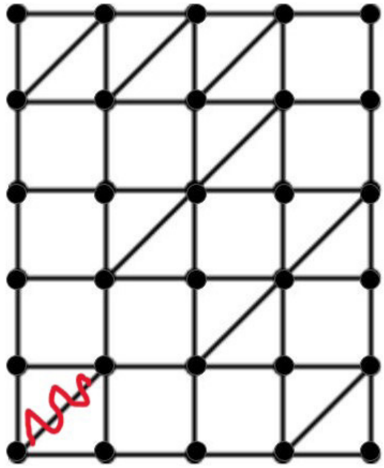


Figura 13. Se puede eliminar la diagonal que se señala y aun así la parrilla seguiría siendo rígida

Sabiendo un poco más de grafos, diez minutos más, podríamos deducir como corolario que cualquier parrilla $n \times m$ no necesita las $n \times m$ que usaría cualquier ingeniero[8] sino que se puede «rigidizar» con $n + m - 1$ barras diagonales, lo cual resulta más barato (y da lugar a una estructura mucho menos pesada).

Por lo tanto, incluso sobra alguna diagonal del grafo parrilla que ya era rígido, puesto que habíamos utilizado 9 barras diagonales, la figura 13 muestra una de las aristas que se puede eliminar en dicho grafo y este aún seguiría siendo rígido.

8. Sin ánimo de ofender a ningún ingeniero, me remito a las pruebas de la torre mostrada en la figura 8, en la que Koechlin y Nouguier usaron barras diagonales como si no existiera un mañana.

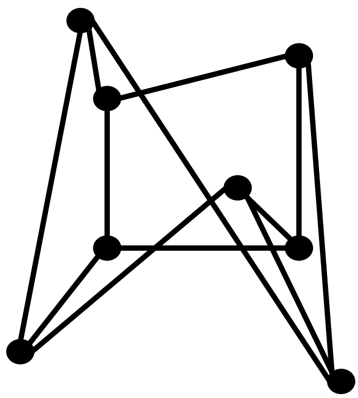
Dibujando grafos

Una vez hecho el guiño anterior a los compañeros y compañeras de estructuras, creo que no es mal plan terminar con alguna mención al dibujo. Porque, efectivamente, existe una disciplina dentro de la teoría de grafos que se dedica a intentar dibujar grafos con la idea de transmitir algún tipo de información concreta: el dibujo de grafos, o *Graph Drawing* en el lenguaje del imperio (del imperio actual, que la historia y las leyes de la termodinámica nos enseñan que todos pasan). Efectivamente, si volvemos a la Wikipedia, vemos que «El dibujo de grafos es un área de las matemáticas y de las ciencias de la computación que combina métodos de la teoría de grafos geométrica y de visualización de datos para obtener representaciones bidimensionales de grafos que surgen de aplicaciones como el análisis de redes sociales, la cartografía, la lingüística o la bioinformática».

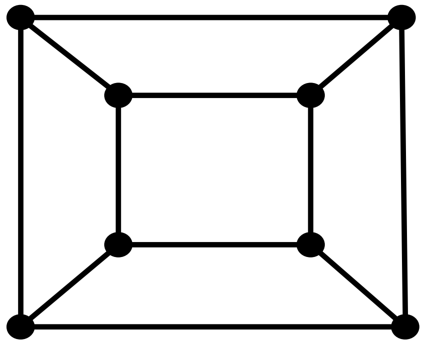
Y sí, efectivamente es una rama de las matemáticas, con sus definiciones, lemas previos, teoremas y corolarios, con algún que otro algoritmo por tocar también las ciencias de la computación. También tiene sus congresos anuales, sus revistas especializadas y todos sus perejiles. Y, como no podía ser de otra forma, voy a tratar de mostrar con ejemplos qué es lo que se quiere decir con esto.

Existen propiedades sencillas de comprobar en un grafo y otras que no lo son tanto. Por lo tanto, cuando se está hablando de una de dichas propiedades y mostramos un grafo, es interesante o deseable dibujarlo mostrando la información clave de dicha propiedad. Por ejemplo, una característica de algunos grafos (no de todos) es que se pueden dibujar en el plano de tal forma que las aristas sean segmentos que no se cortan entre sí. Esto es lo que se llama planaridad de grafos y la figura 14 muestra un ejemplo de un grafo evitando los cruces entre sus aristas. No siempre es fácil determinar (a ojo) si un grafo es plano o no, pero, si lo dibujamos de tal forma que sus aristas no se corten, ya sabremos con total seguridad que el grafo lo es. En cualquier caso, quisiera aclarar que existen algoritmos muy eficientes que determinan si un grafo es plano o no, pero aquí estamos tratando de mostrar cómo dibujarlo para transmitir que un grafo verifica esa propiedad.

Los grafos auxiliares construidos para solucionar el problema de la rigidez en parrillas (figura 12) son ejemplos



a) Un grafo plano (que admite una inmersión en el plano sin que se crucen sus aristas, aunque aquí no se observe).

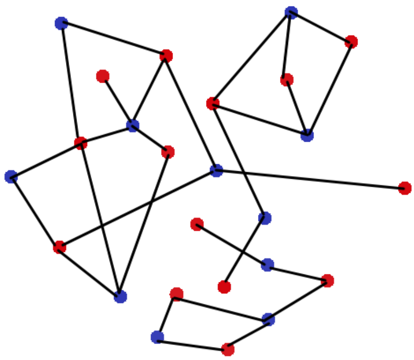


b) El dibujo en el plano (sin cruce entre aristas) del grafo

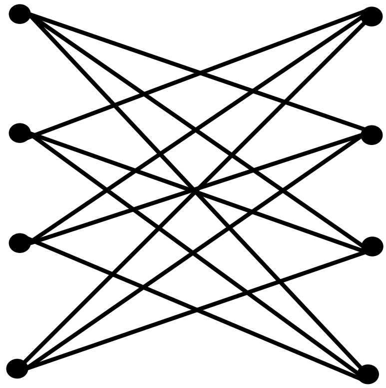
Figura 14. Dos dibujos del mismo grafo plano

de una familia muy utilizada: los grafos bipartitos, que se caracterizan porque sus vértices se pueden dividir en dos subconjuntos de tal forma que todas las aristas van de un subconjunto al otro. La figura 15 muestra dos grafos bipartitos distintos, pero parece evidente que el segundo dibujo es más ilustrativo para mostrar su pertenencia a dicha familia.

Relacionado con el álgebra, es interesante saber si en un grafo todos los vértices juegan un mismo papel. Así un grafo se dice *transitivo* si cualquier vértice puede ser llevado en otro mediante un automorfismo (aplicación biyectiva que conserva



a) Un grafo bipartito



b) Otro grafo bipartito (pero en el que se ve al primer vistazo que lo es)

Figura 15. Ejemplo con dos grafos bipartitos

las adyacencias que determinan las aristas). En otras palabras, un grafo es transitivo si no existe ningún vértice especial que se pueda distinguir de otro. Evidentemente, los vértices y las

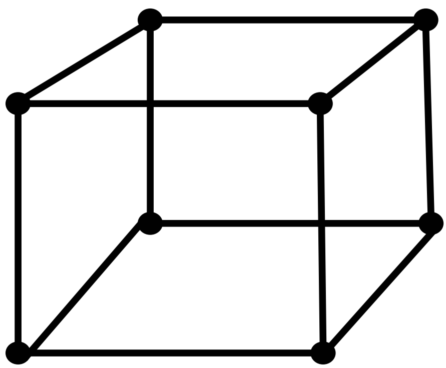


Figura 16. El grafo de los vértices y las aristas de un cubo que, evidentemente, es transitivo

aristas de los sólidos platónicos cumplen dicha propiedad y así está claro que, si vemos el grafo de los vértices y aristas de un cubo, dibujado como tal, podemos vislumbrar que es transitivo, aunque esta propiedad no es tan simple de comprobar desde el punto de vista algorítmico para grafos en general.

Otra característica importante, que verifican algunos grafos, es la de que se pueden recorrer todos los vértices de forma sucesiva y sin repetir ninguno usando las aristas de dicho grafo. Este tipo de grafos se llaman *hamiltonianos*[9] y ella y sus variantes han sido de las propiedades de grafos más estudiadas, aunque, de nuevo, se sabe que no existe, ni puede existir, ningún algoritmo eficiente que determine para cualquier grafo si es hamiltoniano o no. Pero, si sabemos que un grafo lo es y conocemos el ciclo que pasa por todos los vértices sin repetir ninguno, podemos dibujar ese ciclo en la cara exterior y el resto de las aristas cruzándose hacia adentro y comprobaremos visualmente que el grafo es hamiltoniano, tal y como muestra la figura 17.

Ahora bien, si reunimos las cuatro imágenes usadas para ilustrar los cuatro conceptos mencionados en esta sección, como hemos hecho en la figura 18, se puede comprobar, sin

9. El nombre proviene del matemático irlandés sir William Rowan Hamilton (1805-1865), que propuso viajar a veinte ciudades del mundo, representadas como los vértices de un dodecaedro regular, siguiendo las aristas del dodecaedro.

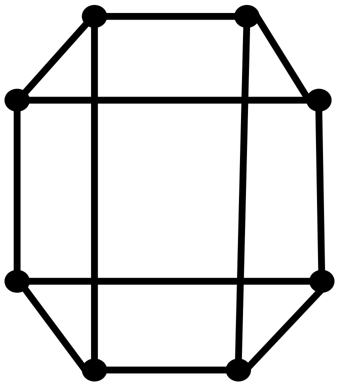


Figura 17. Las aristas que conforman la cara exterior de este dibujo (un octógono) constituyen un ciclo hamiltoniano

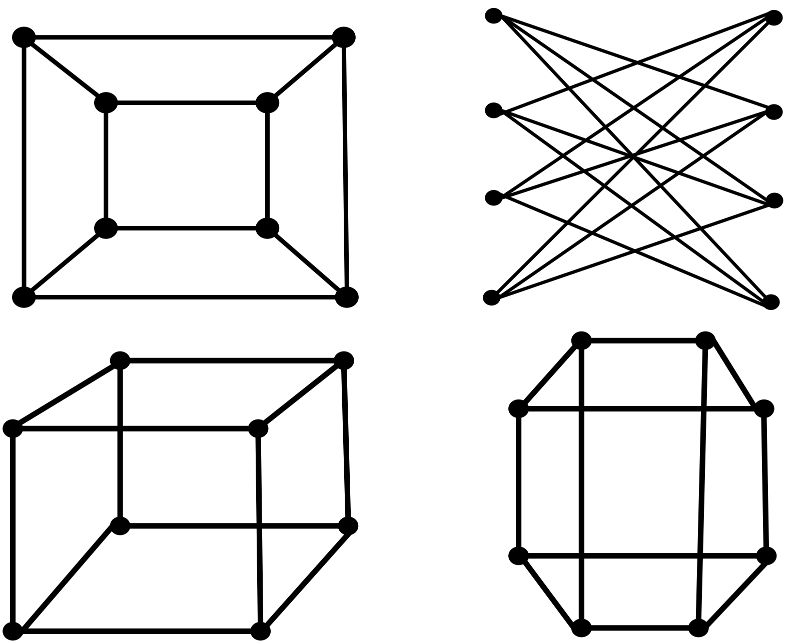


Figura 18. Estos cuatro grafos son, en realidad, el mismo grafo

demasiado esfuerzo, que los cuatro son el mismo grafo, que lo único que se ha hecho en cada caso es representarlo, dibujarlo de la manera más adecuada para tratar de destacar la propiedad que se consideraba en ese momento.

A modo de despedida

Para terminar, creo que es prudente recordar unos últimos consejos que nos regalaba don Antonio por boca de su personaje, el querido Mairena:

> *Huid de escenarios, púlpitos, plataformas y pedestales. Nunca perdáis contacto con el suelo; porque sólo así tendréis una idea aproximada de vuestra estatura.*

Pero, sobre todo, querido público, tened muy en cuenta al salir de aquí:

> *Que no conviene confundir la crítica con las malas tripas.*

Escuela Técnica Superior de
Ingeniería de Edificación

EDITORIAL
UNIVERSIDAD DE SEVILLA