

EJERCICIOS RESUELTOS
DE TEORÍA DE MÁQUINAS
Y MECANISMOS



COLECCIÓN: MONOGRAFÍAS DE ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA

DIRECTOR DE LA COLECCIÓN

Rodríguez Rubio, Francisco. Universidad de Sevilla

CONSEJO DE REDACCIÓN

Arahal Junco, Consuelo. Universidad de Sevilla.

Carballar Rincón, Alejandro. Universidad de Sevilla.

Limón Marruedo, Daniel. Universidad de Sevilla.

Rodríguez Luis, Alejandro José. Universidad de Sevilla.

Rodríguez Rubio, Francisco. Universidad de Sevilla.

Salas Gómez, Francisco. Universidad de Sevilla.

COMITÉ CIENTÍFICO

Aracil Santonja, Javier. Universidad de Sevilla y Universidad de Málaga

Bernelli Zazzera, Franco. Politecnico di Milano

Chinesta, Francisco. École Centrale de Nantes

Félez Mindan, Jesús. Universidad Politécnica de Madrid

Gallego Sevilla, Rafael. Universidad Politécnica de Madrid

García-Lomas Jung, Francisco Javier. Universidad de Sevilla

Giner Maravilla, Eugenio. Universidad Politécnica de Valencia

González Díez, Isabel. Universidad de Sevilla

Montañés García, José Luis. Universidad Politécnica de Madrid

Montes Martos, Juan Manuel. Universidad de Sevilla

Navarro Esteve, Pablo José. Universidad Politécnica de Valencia.

Ollero de Castro, Pedro. Universidad de Sevilla

Verdú, Sergio. Princeton University

Rosario Chamorro Moreno
Daniel García Vallejo
Francisco Javier Martínez Reina
Esther Reina Romo

EJERCICIOS RESUELTOS DE TEORÍA DE MÁQUINAS Y MECANISMOS



SEVILLA 2020

Serie: Ingeniería
Colección: Monografías de la Escuela Técnica Superior de Ingeniería
de la Universidad de Sevilla
Núm.: 20

COMITÉ EDITORIAL:

José Beltrán Fortes
(Director de la Editorial Universidad de Sevilla)
Araceli López Serena
(Subdirectora)
Concepción Barrero Rodríguez
Rafael Fernández Chacón
María Gracia García Martín
Ana Ilundáin Larrañeta
María del Pópulo Pablo-Romero Gil-Delgado
Manuel Padilla Cruz
Marta Palenque Sánchez
María Eugenia Petit-Breuilh Sepúlveda
José-Leonardo Ruiz Sánchez
Antonio Tejedor Cabrera

Reservados todos los derechos. Ni la totalidad ni parte de este libro puede reproducirse o transmitirse por ningún procedimiento electrónico o mecánico, incluyendo fotocopia, grabación magnética o cualquier almacenamiento de información y sistema de recuperación, sin permiso escrito de la Editorial Universidad de Sevilla.

- © Editorial Universidad de Sevilla 2020
C/ Porvenir, 27 - 41013 Sevilla.
Tlfs.: 954 487 447; 954 487 451; Fax: 954 487 443
Correo electrónico: eus4@us.es
Web: <<https://www.editorial.us.es>>
- © Rosario Chamorro Moreno, Daniel García Vallejo,
Francisco Javier Martínez Reina y Esther Reina Romo 2020

Impreso en papel ecológico
Impreso en España-Printed in Spain

ISBN 978-84-472-3054-9
Depósito Legal: SE 2244-2020

Diseño de cubierta: Santi García Hernández
Maquetación: Daniel García Vallejo
Impresión: Tórculo Comunicación Gráfica, S. A.

A nuestras familias
A nuestros maestros

Prólogo

Es un placer para mí hacer el prólogo de un libro de Problemas de Teoría de Máquinas y Mecanismos como este por diferentes razones. En primer lugar, porque la Teoría de Máquinas y Mecanismos es una disciplina en la que he estado involucrado más de 40 años y cuya docencia he visto evolucionar a lo largo de los años, viviendo la introducción de los nuevos métodos de cálculo y la computación como arte de sus herramientas de trabajo. Independientemente de que yo empezara a hacer transformaciones en la docencia de la disciplina, los principales cambios se deben al trabajo de los profesores jóvenes del departamento, que son los que han impartido esta asignatura en los últimos años y entre los que se encuentran los autores de este libro, Rosario Chamorro Moreno, Daniel García Vallejo, Javier Martínez Reina y Esther Reina Romo. Por otro lado, los autores del libro son los principales artífices de la buena formación de los alumnos en esta materia en nuestra Universidad. Prueba de ello son los éxitos cosechados en las olimpiadas nacionales e internacionales de la materia por ellos en los años en que se llevan celebrando. Además, es una satisfacción que los autores, que fueron discípulos míos, me pidan que haga el prólogo del libro.

Este libro es el resultado de más de cuarenta años de docencia de la asignatura en la Escuela Técnica Superior de Ingeniería de la Universidad de Sevilla y sobre todo de los más de 10 años que llevan impartíendola los autores del libro y es el complemento ideal al libro Teoría de Máquinas y Mecanismos, publicado también por la Universidad de Sevilla, en el que también han participado los autores. El conjunto de ambos libros muestra una visión moderna de la Teoría de Máquinas y de los procedimientos para abordarla, combinando algunos procedimientos gráficos con los analíticos, de fácil solución actualmente con el uso de ordenador. En él se incluyen problemas propuestos en exámenes de la asignatura durante los últimos años y abarca las diferentes materias incluidas normalmente en los programas de esta disciplina en la mayoría de las universidades, incluyendo materias clásicas de la disciplina como son los análisis cinemático y dinámico de máquinas, la síntesis de mecanismos y el análisis y síntesis de componentes mecánicos como son levas, engranajes y correas. Como problemas de examen que son, representan un paso más hacia la comprensión de las materias en relación a los ejemplos incluidos en el libro de teoría. Se plantean problemas que abarcan diferentes aspectos de la teoría de máquinas estrechamente relacionados y que requieren una solución secuencial de los mismos.

El libro está especialmente indicado para alumnos de la asignatura de Teoría de Máquinas en cursos de grado de las escuelas de ingeniería. La organización del material es la usual en un curso como estos, comenzando con una parte dedicada al análisis cinemático, continuando con otra que se ocupa del análisis dinámico, para lo que generalmente es necesario realizar también el cinemático y siguiendo con un apartado dedicado a la síntesis de mecanismos, algo especialmente importante para el diseño de sistemas mecánicos. Seguidamente se dedican otros tres apartados a tratar los temas de análisis y síntesis de diferentes componentes de máquinas, como son levas, geometría y cinemática de trenes de engranajes y dinámica y diseño de transmisiones por correas.

Puede decirse que es un buen libro de apoyo al aprendizaje de la Teoría de Máquinas para alumnos de grado de ingenierías, que aborda los ejercicios con metodologías de solución modernas. Es el resultado de varias décadas de docencia de la materia, en las que se han ido puliendo las metodologías de presentación de los diferentes aspectos para hacerlos más fáciles de asimilar y con mayor homogeneidad en el tratamiento. En resumen, es un buen complemento para la formación en la Teoría de Máquinas, escrito por profesores con amplia experiencia en la docencia de la asignatura.

*Jaime Domínguez Abascal
Sevilla, 2020*

Índice

<i>Prólogo</i>	III
<i>Índice</i>	V
<i>Notación</i>	IX
1. Análisis cinemático de mecanismos	1
1.1. Ecuaciones de lazo (I)	3
1.2. Ecuaciones de lazo (II)	10
1.3. Matrices jacobianas (I)	18
1.4. Matrices jacobianas (II)	23
1.5. Velocidades/aceleraciones relativas y CIR	26
1.6. Velocidades/aceleraciones relativas y CIR (II)	29
1.7. Velocidades/aceleraciones relativas y CIR (III)	33
1.8. Velocidades/aceleraciones relativas (IV)	36
1.9. Velocidades/aceleraciones relativas (V) y matrices jacobianas	41
1.10. Velocidades/aceleraciones relativas (VI)	45
1.11. Velocidades/aceleraciones relativas (VII)	49
1.12. Velocidades/aceleraciones relativas (VIII)	52
1.13. Varios grados de libertad y mecanismos equivalentes	55
1.14. Centros instantáneos de rotación	60
2. Ejercicios de cinemática y dinámica de mecanismos	69
2.1. Análisis dinámico inverso (I)	70
2.2. Análisis dinámico inverso (II)	74
2.3. Análisis dinámico inverso (III)	77
2.4. Análisis dinámico inverso (IV)	80
2.5. Análisis dinámico directo (I)	83
2.6. Análisis dinámico directo (II)	86
2.7. Análisis dinámico directo (III)	89
2.8. Análisis dinámico directo (IV)	93

2.9. Análisis dinámico directo (V)	99
2.10. Análisis dinámico inverso/directo mediante PPV (I)	105
2.11. Análisis dinámico inverso/directo mediante PPV (II)	110
2.12. Análisis dinámico inverso/directo mediante PPV (III)	114
2.13. Análisis dinámico inverso/directo mediante PPV (IV)	117
2.14. Análisis dinámico inverso/directo mediante PPV (V)	123
2.15. Análisis dinámico inverso/directo mediante PPV (VI)	125
2.16. Análisis dinámico inverso/directo mediante PPV (VII)	128
2.17. Análisis dinámico inverso/directo mediante PPV (VIII)	133
2.18. Equilibrado de rotores (I)	136
2.19. Equilibrado de rotores (II)	137
3. Ejercicios de síntesis	141
3.1. Síntesis de número	142
3.2. Gen. de funciones. Mec. de 4 barras	143
3.3. Gen. de función lineal.	145
3.4. Gen. de funciones. Mec. de 4 barras	146
3.5. Gen. de funciones. Derivadas de precisión	151
3.6. Gen. funciones. Mec. de doble corredera	152
3.7. Gen. funciones. Mec. biela manivela	154
3.8. Gen. funciones. Mec. biela manivela	156
3.9. Gen. funciones. Inversión del biela manivela	158
3.10. Accionamiento del tensor de una correa	161
3.11. Síntesis de dirección de un vehículo	163
3.12. Depósito cónico	167
3.13. Tacómetro	170
3.14. Compresor isoterma	173
3.15. Síntesis gráfica, especificación de par fijo	176
3.16. Síntesis gráfica, especificación de par fijo	178
3.17. Síntesis gráfica de biela manivela	182
3.18. Síntesis de guiado de biela (I)	185
3.19. Síntesis de generación de trayectoria (I)	188
3.20. Síntesis de guiado de biela (II)	191
3.21. Síntesis de guiado de biela (III)	193
3.22. Síntesis de guiado de biela (IV)	195
3.23. Síntesis de guiado de biela (V)	200
3.24. Síntesis de generación de trayectoria (II)	207
3.25. Síntesis de generación de trayectoria (III)	210
3.26. Síntesis de guiado de biela (VI)	214
4. Ejercicios de levas	219
4.1. Levas: diseño de diagrama de desplazamientos	219
4.2. Levas: diseño de diagrama de desplazamientos	221

4.3.	Levas: diseño de diagrama de desplazamientos	225
4.4.	Levas: diseño de diagrama de desplazamientos	227
4.5.	Levas: diseño de diagrama de desplazamientos	229
4.6.	Levas: diseño de diagrama de desplazamientos	231
4.7.	Levas: diseño de diagrama de desplazamientos	234
4.8.	Levas: diseño de diagrama de desplazamientos	236
4.9.	Levas: diseño de diagrama de desplazamientos	238
4.10.	Levas: diseño de diagrama de desplazamientos	241
4.11.	Levas: diseño de diagrama de desplazamientos	244
4.12.	Levas: diseño de diagrama de desplazamientos	247
4.13.	Levas: diseño de diagrama de desplazamientos	248
4.14.	Levas: diseño del perfil de una leva con seguidor puntual	249
5.	Ejercicios de engranajes	253
5.1.	Engranajes: diseño de tren de engranajes ordinario (I)	254
5.2.	Engranajes: diseño de tren de engranajes ordinario (II)	257
5.3.	Engranajes: diseño de tren de engranajes ordinario (III)	261
5.4.	Engranajes: diseño de tren de engranajes ordinario (IV)	264
5.5.	Engranajes: diseño de un tren de engranajes ordinario (V)	270
5.6.	Engranajes: diseño de un tren de engranajes epicicloidal (I)	273
5.7.	Engranajes: diseño de un tren de engranajes epicicloidal (II)	277
5.8.	Engranajes: diseño de un tren de engranajes epicicloidal (III)	283
5.9.	Engranajes: diseño de un tren de engranajes epicicloidal (IV)	288
5.10.	Engranajes: diseño de un tren de engranajes epicicloidal (V)	293
5.11.	Engranajes: diseño de un tren de engranajes mixto (I)	298
5.12.	Engranajes: diseño de un tren de engranajes mixto (II)	299
5.13.	Engranajes: diseño de un tren de engranajes mixto (III)	302
5.14.	Engranajes: diseño de un tren de engranajes mixto (IV)	305
5.15.	Engranajes: diseño de un tren de engranajes mixto (V)	307
5.16.	Engranajes: diseño de un tren de engranajes mixto (VI)	310
5.17.	Engranajes: diseño de un tren de engranajes mixto (VII)	314
6.	Ejercicios de correas	319
6.1.	Cálculo de parámetros de funcionamiento (I)	320
6.2.	Cálculo de parámetros de funcionamiento (II)	323
6.3.	Cálculo de parámetros de funcionamiento (III)	326
6.4.	Cálculo de parámetros de funcionamiento (IV)	329
6.5.	Cálculo de parámetros de funcionamiento (V)	332
6.6.	Cálculo de parámetros de funcionamiento (VI)	335
6.7.	Cálculo de parámetros de funcionamiento (VII)	336
6.8.	Cálculo de parámetros de funcionamiento (VIII)	339
6.9.	Cálculo exacto de tensiones en la correa	342
6.10.	Transmisión con polea tensora	350

6.11. Diseño de una transmisión	353
Apéndice A. Tablas de perfiles de levas	361
A.1. Tablas de perfiles armónicos y cicloidales de levas	361
Apéndice B. Tablas	367
B.1. Tabla de la función evolvente	367
<i>Bibliografía</i>	371
<i>Índice alfabético</i>	373

Notación

En este libro se asume que el movimiento es plano y que éste ocurre en el plano $x - y$. Por tanto, los vectores velocidad angular y los momentos actuantes sobre los sólidos tienen dirección paralela al eje z .

Las variables escalares se representan en cursiva, mientras las variables vectoriales se representan en negrilla. Los vectores pueden representarse matricialmente como una matriz columna.

Símbolo	Descripción
$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$	Producto vectorial de \mathbf{a} y \mathbf{b} .
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$	Producto escalar de \mathbf{a} y \mathbf{b} .
$\mathbf{a}^T \mathbf{b}$	Producto escalar de \mathbf{a} y \mathbf{b} en notación matricial.
a	En tornillos, espesor del filete de un tornillo. En correas, distancia libre de correa entre poleas.
a_C	En engranajes, altura de cabeza de un diente.
a_F	Altura de fondo de un diente.
a_P	Altura de pie de un diente.
\mathbf{a}_{ij}^P	Vector aceleración del punto P del sólido i respecto al sistema de referencia del sólido j .
a_{ijx}^P	Componente x del vector aceleración del punto P del sólido i respecto al sistema de referencia del sólido j .
a_{ijy}^P	Componente y del vector aceleración del punto P del sólido i respecto al sistema de referencia del sólido j .
\mathbf{a}_{ij}^{tA}	Aceleración tangencial del punto A del sólido i respecto al sistema de referencia del sólido j .
\mathbf{a}_{ij}^{nA}	Aceleración normal del punto A del sólido i respecto al sistema de referencia del sólido j .
A	En correas, área de la sección de la misma.
$\mathbf{A}(\alpha)$	Matriz de giro que permite girar un vector un ángulo α .
b	Número de pares cinemáticos binarios de un mecanismo.

Símbolo	Descripción
B	Número de barras binarias de un mecanismo.
\mathbf{B}	Matriz de distribución que permite obtener la fuerza generalizada asociada al vector de fuerzas o pares externos desconocidos.
c	En correas, distancia entre los centros de las poleas.
C_B	Arco de conducción en la circunferencia base de una rueda dentada.
C_I	Número de pares de clase I de un mecanismo.
C_{II}	Número de pares de clase II de un mecanismo.
d	Diámetro exterior de la rosca de un tornillo.
d_1	Diámetro interior de la rosca de un tornillo.
d_2	Diámetro medio de la rosca de un tornillo.
D	Diámetro de una polea.
e	Espesor en axoide del diente de una rueda dentada.
e_B	Espesor de base del diente de una rueda dentada.
E	Error cuadrático medio.
	Módulo de Young.
f	Suplemento de cabeza de una rueda dentada.
F	Fuerza.
F_c	Fuerza centrífuga.
F_0	Fuerza inicial (pretensión) en una correa.
F_r	En correas, fuerza de rozamiento.
\mathbf{F}_i^P	Fuerza aplicada en el punto P del sólido i .
F_{ix}^P	Componente x del vector fuerza aplicada en el punto P del sólido i .
F_{iy}^P	Componente y del vector fuerza aplicada en el punto P del sólido i .
G	Número de grados de libertad de un mecanismo.
GDL	Acrónimo de grados de libertad de un mecanismo.
h	Altura de la sección de una correa.
	Altura de una tuerca.
H	Altura de la rosca de un tornillo.
\mathbf{i}	Vector unitario en la dirección del eje x del sistema de referencia inercial.
\mathbf{i}_k	Vector unitario en la dirección del eje x del sistema de referencia del sólido k .
I	Momento de inercia de área de una correa.
\mathbf{I}	Matriz identidad.
$\tilde{\mathbf{I}}$	Matriz antisimétrica de transformación. Realiza una rotación respecto a un eje.
I_{ij}	Centro instantáneo de rotación del movimiento relativo del sólido i respecto del sólido j .

Símbolo	Descripción
I_{Gj}	Momento de inercia másico del sólido j respecto a su centro de gravedad, G_j .
I_{Oj}	Momento de inercia másico del sólido j respecto al punto fijo O_j .
\mathbf{j}	Vector unitario en la dirección del eje y del sistema de referencia inercial.
\mathbf{j}_k	Vector unitario en la dirección del eje y del sistema de referencia del sólido k .
$\bar{\mathbf{J}}_{Tj}$	Matriz jacobiana de las traslaciones del centro de gravedad del sólido j .
$\bar{\mathbf{J}}_{Rj}$	Matriz jacobiana (escalar) de las rotaciones del sólido j .
$\bar{\mathbf{J}}$	Matriz jacobiana del mecanismo que realiza una transformación de velocidades independientes a velocidades dependientes.
l	Avance de una rosca.
L	Elevación total o carrera del seguidor en un mecanismo de levas.
	Longitud de una correa.
L_i	Elevación parcial del seguidor en el tramo i de un perfil de levas compuesto.
m	Masa de un sólido.
	Módulo en axoide de una rueda dentada.
	Número de filetes en contacto en un tornillo.
m_B	Módulo de base de una rueda dentada.
M	En correas, par aplicado a una polea.
\mathbf{M}	Matriz de masa del mecanismo en coordenadas independientes.
$\bar{\mathbf{M}}$	Matriz de masa del mecanismo en coordenadas dependientes.
M_{ij}	Momento de reacción entre el sólido i y el sólido j .
n	Relación de transmisión en correas.
	Número de filetes en la rosca de un tornillo.
n_f^j	Número de fuerzas externas que actúan sobre el sólido j .
n_m^j	Número de momentos externos que actúan sobre el sólido j .
N	Número de barras de un mecanismo.
	Componente normal de la fuerza de contacto.
\mathbf{N}_{ij}	Fuerza de reacción normal entre el sólido i y el j .
N_{ij}	Valor de la fuerza de reacción normal entre el sólido i y el j .
p	Número de pares cinemáticos pentarios de un mecanismo.
	Paso en axoide de un engranaje.
	Paso de la rosca de un tornillo.
p_B	Paso de base de una rueda dentada.
p_0	Presión admisible en la superficie de la rosca de un tornillo.

Símbolo	Descripción
P	Número de barras pentagonales de un mecanismo. Potencia. En tornillos, fuerza que aplicada a una distancia $d_2/2$ produciría el par de apriete.
P^*	Potencia virtual.
P_{ij}	En síntesis, polo del movimiento entre las posiciones i y j .
PQ	En cinemática, vector con origen en el punto P y final en el punto Q .
q	Número de pares cinemáticos cuaternarios de un mecanismo.
\mathbf{q}_{ext}	Vector de fuerzas generalizas debido a fuerzas o pares externos.
\mathbf{q}_e	Vector de fuerzas generalizas debido solo a fuerzas o pares externos conocidos.
\mathbf{q}_g	Vector de fuerzas generalizas debido a fuerzas gravitatorias.
\bar{Q}	Número de barras cuaternarias de un mecanismo.
\bar{Q}	Matriz de distribución de fuerzas de reacción.
r	En un tornillo, distancia al eje del mismo.
\mathbf{r}_{ij}^P	Vector de posición del punto P del sólido i respecto al origen del sistema de referencia del sólido j .
r_{ijx}^P	Componente x del vector de posición del punto P del sólido i respecto al origen del sistema de referencia del sólido j .
r_{ijy}^P	Componente y del vector de posición del punto P del sólido i respecto al origen del sistema de referencia del sólido j .
R	Radio de axoide de una rueda dentada. En correas, radio de la polea.
R_{apun}	Radio de apuntamiento de una rueda dentada.
R_B	Radio de la circunferencia base de una rueda dentada.
R_C	Radio de cabeza de una rueda dentada.
R_C^{Int}	En engranajes, radio de cabeza máximo para que no se produzca interferencia.
R_F	Radio de fondo de una rueda dentada.
\mathbf{R}_{ij}	Fuerza de reacción que realiza el sólido i sobre el sólido j .
R_{ijx}	Componente x del vector fuerza de reacción del sólido i sobre el sólido j .
R_{ijy}	Componente y del vector fuerza de reacción del sólido i sobre el sólido j .
R_P	Radio de pie de una rueda dentada.
t	Instante de tiempo. Número de pares cinemáticos ternarios de un mecanismo.
T	Número de barras ternarias de un mecanismo. Par de apriete aplicado a un tornillo.
\mathbf{T}_{ij}	Fuerza de reacción tangencial que realiza el sólido i sobre el sólido j .

Símbolo	Descripción
T_{ij}	Módulo de la fuerza de reacción tangencial que realiza el sólido i sobre el sólido j .
v	Velocidad lineal.
\mathbf{v}_{ij}^P	Vector velocidad del punto P del sólido i respecto al sistema de referencia del sólido j .
v_{ijx}^P	Componente x del vector velocidad del punto P del sólido i respecto al sistema de referencia del sólido j .
v_{ijy}^P	Componente y del vector velocidad del punto P del sólido i respecto al sistema de referencia del sólido j .
\mathbf{v}_{ij}^{P*}	Vector velocidad virtual del punto P del sólido i respecto al sistema de referencia del sólido j .
W_{nc}	Trabajo de las fuerzas no conservativas.
W_m	Trabajo motor.
W_u	Trabajo resistente útil.
W_r	Trabajo resistente debido a fuerzas disipativas.
\mathbf{X}	Vector de coordenadas dependientes que contiene las coordenadas del centro de masas y el ángulo de orientación de todos los sólidos móviles del mecanismo.
$\dot{\mathbf{X}}$	Vector de velocidades dependientes que contiene las componentes de la velocidad del centro de masas y la velocidad angular de todos los sólidos móviles del mecanismo.
$\ddot{\mathbf{X}}$	Vector de aceleraciones dependientes que contiene las componentes de la aceleración del centro de masas y la aceleración angular de todos los sólidos móviles del mecanismo.
y	En mecanismos de levas, desplazamiento del seguidor hasta una determinada posición.
\dot{y}	Velocidad instantánea del seguidor.
\ddot{y}	Aceleración instantánea del seguidor.
$\ddot{\ddot{y}}$	Sobreaceleración instantánea del seguidor.
(\mathbf{W}, \mathbf{Z})	Par de vectores que representan una díada en un mecanismo, manivela (o balancín) y acoplador, respectivamente.
Z	Número de dientes de una rueda dentada.
α	ángulo de empuje en un par de engranaje. ángulo de la hélice de una rosca.
α_j	En síntesis, rotación del vector \mathbf{Z}_A de una díada, correspondiente a la biela, entre las posiciones 1 y j .
$\boldsymbol{\alpha}_{ij}$	Vector aceleración angular del sólido i respecto al sólido j .
α_{ij}	Componente z del vector velocidad angular del sólido i respecto al sólido j .
α^{rec}	ángulo de empuje mínimo de recubrimiento de un engranaje.
β	En correas, ángulo de la ranura de la polea.

Símbolo	Descripción
	En tornillos, semiángulo formado por las caras de un filete rosca.
β_i	En levas, ángulo total girado por la leva en el tramo i de un perfil de levas compuesto.
β_j, γ_j, \dots	En síntesis, rotación del vector \mathbf{W} de una dñada, correspondiente a la manivela o balancín, entre las posiciones 1 y j .
δ	Flecha o deflexión en una correa. ángulo de presión en levas.
δ_j	En síntesis, vector que mide el desplazamiento de un punto arbitrario del acoplador, P , entre las posiciones 1 y j .
ΔE_c	Variación de la energía cinética.
ΔE_p	Variación de la energía potencial.
ΔE_m	Variación de la energía mecánica.
ε	Coefficiente de recubrimiento en un par de engranaje.
ε_e	En síntesis, error estructural.
η	Rendimiento de un mecanismo. Relación de transmisión. Eficiencia de una transmisión por tornillo.
θ	ángulo de deslizamiento en el contacto correa-polea.
κ	Relación de aspecto entre la base de un filete de rosca y el paso.
λ	Vector de fuerzas de reacción.
μ	Coefficiente de rozamiento.
μ_c	Coefficiente de rozamiento en la cabeza del tornillo.
μ_d	Coefficiente de rozamiento dinámico.
μ_{ij}	Coefficiente de rozamiento entre el sólido i y el j .
μ_s	Coefficiente de rozamiento estático.
ρ	Densidad
σ	Tensión normal. Tensión axial en una correa.
τ	Tensión tangencial.
τ_{ext}	Vector de fuerzas o pares externos desconocidos.
ϕ	ángulo girado por la leva hasta una determinada posición. ángulo de contacto correa-polea.
ψ	Pérdida de potencia en una transmisión por correas.
ω	Velocidad angular.
ω_{ij}	Vector velocidad angular del sólido i respecto al sólido j .
ω_{ij}	Componente z del vector velocidad angular del sólido i respecto al sólido j .
ω_{ij}^*	Componente z del vector velocidad angular virtual del sólido i respecto al sólido j .

1 Análisis cinemático de mecanismos

El análisis cinemático trata de la obtención de datos de posición, velocidad y aceleración de un mecanismo a partir del conocimiento de un número igual al número de grados de libertad de parámetros independientes de posición, velocidad o aceleración y del conocimiento de todas las características geométricas que definen el mecanismo objeto de estudio, tales como distancias, longitudes, ángulos característicos, etc. No se discute, en este capítulo, como pueden conseguirse los estados cinemáticos objeto de análisis. Esto se deja para el siguiente capítulo, capítulo 2, en el que se trata la relación entre las fuerzas, los movimientos, los trabajos y las energías del sistema. Los mecanismos analizados contienen una amplia variedad de pares cinemáticos, de tal manera que el lector puede aprender las particularidades de unos y otros. En particular, se ha intentado usar mecanismos que incluyan el máximo número de tipos diferentes de pares cinemáticos, a pesar de que por ello resulten excesivamente académicos (ver problemas 1.10, 1.11 y 1.12). Los problemas resueltos en este capítulo siguen los planteamientos que se recogen en la obra [2], por lo que se recomienda al lector la consulta de esta referencia durante la revisión de los distintos casos.

En esta introducción al capítulo se pretende dar una orientación al lector acerca de dónde, en qué problema, puede encontrar tratado alguno de los conceptos más importantes del análisis cinemático, como son: el cálculo del número de grados de libertad, el planteamiento de las ecuaciones necesarias dependiendo del método utilizado, el concepto de ángulo de transmisión, las relaciones entre coordenadas, velocidades y aceleraciones a través de matrices jacobianas o el uso de los centros instantáneos de rotación.

El concepto de número de grados de libertad del mecanismo hace referencia al número de parámetros cinemáticos independientes que deben conocerse para poder calcular cualquier posición, velocidad o aceleración del mecanismo. Esta definición tiene como consecuencia que el número de grados de libertad también habla del número de movimientos globales, de varios sólidos, o locales, de un solo sólido, diferentes que el mecanismo puede realizar. El cálculo exacto del número de grados de libertad es fundamental puesto que condiciona

el número de datos necesarios para cuadrar el problema. Así, por ejemplo, una mala estimación del número de grados de libertad podría dar lugar a pensar que el número de datos proporcionados por el enunciado es insuficiente o, por el contrario, es redundante. Siendo este concepto tan importante, cualquier problema es susceptible de ser analizado desde la perspectiva del número de grados de libertad. En particular, este concepto aparece tratado explícitamente en los problemas 1.2, 1.3, 1.6, 1.7 y 1.13. La mayoría de los mecanismos de los problemas antes mencionados tienen un solo grado de libertad, a excepción del mecanismo objeto de estudio en el problema 1.13. Merece la pena analizar la influencia que tiene el número de grados de libertad en la resolución de cada problema. Un concepto relacionado con la movilidad del mecanismo es el ángulo de transmisión, que aparece en el problema 1.7. Igualmente, los puntos singulares en los que los problemas de velocidad y aceleración no pueden resolverse se tratan en los problemas 1.1 y 1.2.

Los mecanismos cinemáticamente equivalentes facilitan el análisis de muchos mecanismos debido a la posibilidad de utilizar mecanismos más sencillos que representan un mismo estado cinemático. Sin embargo, no siempre es fácil encontrar alternativas cinemáticamente equivalentes a un mecanismo dado. Por este motivo, este concepto se ejemplifica en los problemas 1.1, 1.2 y 1.13.

El análisis de posición se aborda únicamente mediante el método de las ecuaciones de lazo y el uso de coordenadas Lagrangianas. Este método tiene la ventaja de ser, en general, válido para todas las configuraciones del mecanismo. Además, las ecuaciones de restricción a nivel de posición pueden derivarse con respecto al tiempo para obtener ecuaciones válidas para la resolución de los problemas de velocidades y aceleraciones. Este planteamiento se trata en los problemas 1.1, 1.2, 1.3 y 1.4. Especial atención se le presta al método basado en las relaciones entre velocidades y aceleraciones relativas. Este método se usa solo en este libro para el análisis cinemático de mecanismos en una configuración determinada, para la cual la posición de los sólidos es conocida. Este método aparece tratado en los problemas 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 1.10, 1.11, 1.12 y 1.13.

El método basado en las relaciones entre velocidades y aceleraciones relativas tiene como inconveniente el hecho de que las ecuaciones obtenidas son dependientes de la posición, por lo que en cada posición hay que plantear las ecuaciones de velocidades o aceleraciones. Sin embargo, para una misma configuración resulta sencillo hacer varios análisis de velocidad o aceleración para diferentes valores de la velocidad o aceleración de entrada gracias a la linealidad de los problemas de velocidad y aceleración en una configuración dada. Este aspecto se trata en los problemas 1.5 y 1.6.

En algunas ocasiones los centros instantáneos de rotación (CIR) ofrecen una alternativa para el cálculo de velocidades cuya ventaja fundamental se aprecia más desde un punto de vista gráfico. Los centros instantáneos de rotación permiten interpretar el movimiento relativo con cierta facilidad. En algunas configuraciones sencillas, pueden simplificar el cálculo numérico. Sin embargo, en posiciones arbitrarias su utilización puede llevar aparejada la misma complejidad de cálculo que los métodos anteriores. El uso de los centros instantáneos de rotación se incluye en los problemas 1.5, 1.6, 1.7, 1.13 y 1.14.

1.1 Ecuaciones de lazo (I)

Para el mecanismo de la figura 1.1, se pide calcular la velocidad angular, $\dot{\varphi}_5$, y la aceleración angular, $\ddot{\varphi}_5$, del rodillo 5. El contacto entre el rodillo y la leva es de rodadura sin deslizamiento.

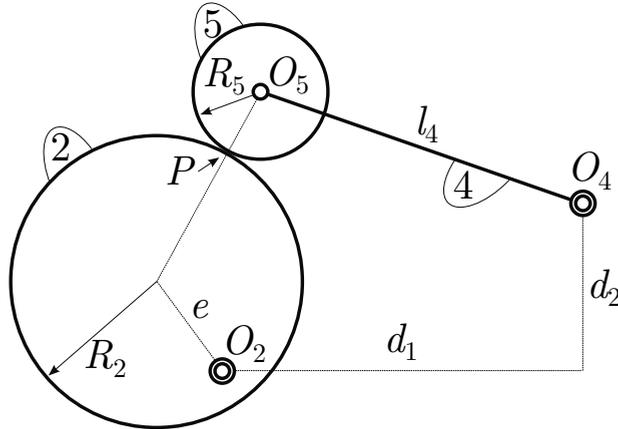


Figura 1.1 Mecanismo de leva circular con seguidor de rodillo del problema 1.1.

Los valores de los parámetros que aparecen en la figura, de la velocidad angular y de la aceleración angular de la leva 2 son los siguientes:

$$e = 2 \text{ cm} \qquad d_1 = 5 \text{ cm} \qquad (1.1)$$

$$R_2 = 3 \text{ cm} \qquad d_2 = 3 \text{ cm} \qquad (1.2)$$

$$R_5 = 2 \text{ cm} \qquad \varphi_2 = 2\pi/3 \text{ rad} \qquad (1.3)$$

$$l_3 = R_2 + R_5 = 5 \text{ cm} \qquad \dot{\varphi}_2 = 10 \text{ rad/s} \qquad (1.4)$$

$$l_4 = 6 \text{ cm} \qquad \ddot{\varphi}_2 = 1 \text{ rad/s}^2 \qquad (1.5)$$

Solución.

1. Cálculo de variables de posición

El mecanismo equivalente que se va a utilizar es el mostrado en la figura 1.2. La ecuación vectorial de lazo del mecanismo equivalente es la siguiente:

$$\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4 = \mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2 \qquad (1.6)$$

$$\begin{pmatrix} e \cos \varphi_2 \\ e \sin \varphi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_3 \cos \varphi_3 \\ l_3 \sin \varphi_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_4 \cos \varphi_4 \\ l_4 \sin \varphi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ d_2 \end{pmatrix} \qquad (1.7)$$

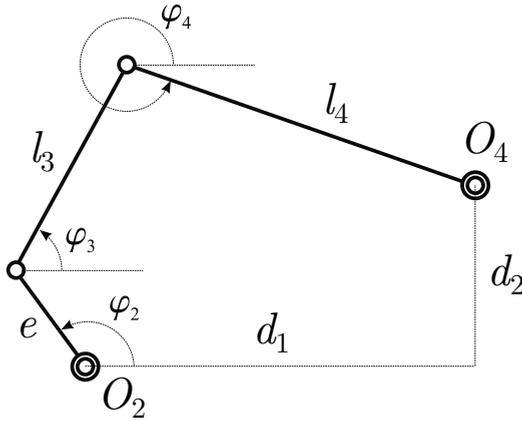


Figura 1.2 Mecanismo equivalente.

Esta ecuación puede escribirse componente a componente de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} l_3 \cos \varphi_3 + l_4 \cos \varphi_4 &= d_1 - e \cos \varphi_2 = A \\ l_3 \sin \varphi_3 + l_4 \sin \varphi_4 &= d_2 - e \sin \varphi_2 = B \end{aligned} \quad (1.8)$$

Nótese que los segundos miembros de las ecuaciones anteriores son conocidos y se pueden agrupar en las constantes A y B para simplificar el cálculo. A continuación, se realizan algunas operaciones algebraicas para calcular el valor de las variables angulares φ_3 y φ_4 en función de φ_2 .

$$\begin{aligned} l_3 \cos \varphi_3 &= A - l_4 \cos \varphi_4 \\ l_3 \sin \varphi_3 &= B - l_4 \sin \varphi_4 \end{aligned} \quad (1.9)$$

Elevando las expresiones anteriores al cuadrado y sumando miembro a miembro, se obtiene:

$$(l_3 \cos \varphi_3)^2 + (l_3 \sin \varphi_3)^2 = (A - l_4 \cos \varphi_4)^2 + (B - l_4 \sin \varphi_4)^2 \quad (1.10)$$

$$l_3^2 = A^2 + l_4^2 \cos^2 \varphi_4 - 2Al_4 \cos \varphi_4 + B^2 + l_4^2 \sin^2 \varphi_4 - 2Bl_4 \sin \varphi_4 \quad (1.11)$$

$$A \cos \varphi_4 + B \sin \varphi_4 = \frac{-l_3^2 + A^2 + l_4^2 + B^2}{2l_4} = C \quad (1.12)$$