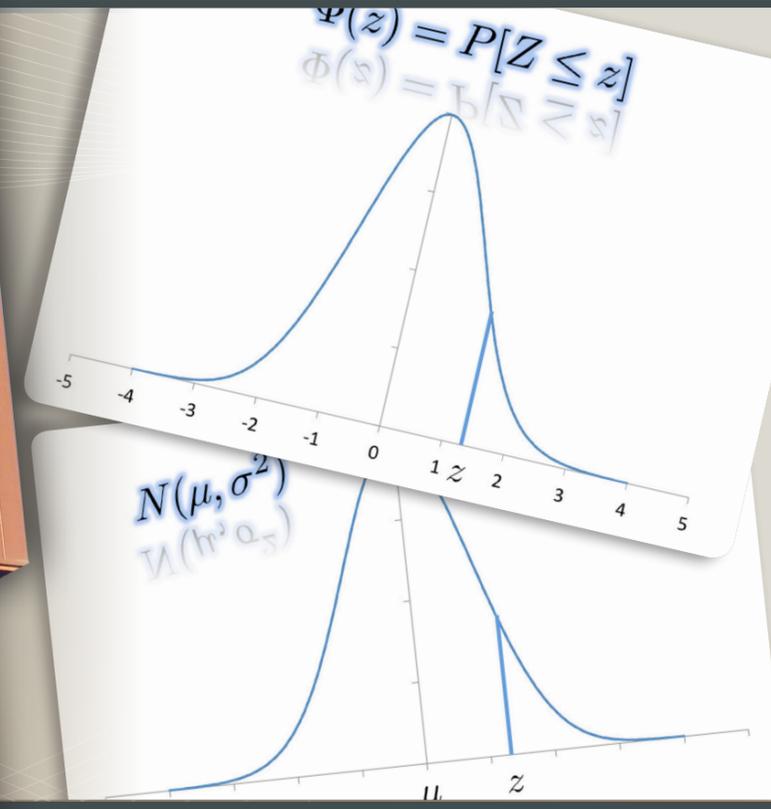


José Manuel Framiñán Torres  
Paz Pérez González  
Gabriel Villa Caro  
Víctor Fernández-Viagas Escudero

# PROBLEMAS RESUELTOS DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA EN LA INGENIERÍA



3

José Manuel Framiñán Torres, Paz Pérez González  
Gabriel Villa Caro, Víctor Fernández-Viagas Escudero

PROBLEMAS RESUELTOS DE PROBABILIDAD  
Y ESTADÍSTICA EN LA INGENIERÍA

## PROBLEMAS RESUELTOS DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA EN LA INGENIERÍA

Este libro contiene una colección de problemas propuestos de Estadística e Investigación Operativa, clasificados según su dificultad y resueltos de varias formas posibles y con gran nivel de detalle; incluyendo asimismo al comienzo de cada capítulo una breve sinopsis de los contenidos teóricos requeridos. Para un uso adecuado del libro, se recomienda abordar primero los problemas de forma autónoma. Con ello se pretende no sólo entender cómo se ha resuelto el problema, sino ser capaz de resolverlo de forma autónoma, desarrollando habilidades de análisis e intuición, fundamentales para la Ingeniería.

Títulos publicados de la colección Monografías de la Escuela Técnica Superior de Ingeniería de la Universidad de Sevilla

*Introducción a la representación gráfica por ordenador*

CARLOS COBOS GUTIÉRREZ, FRANCISCO VALDERRAMA GUAL  
Y CRISTINA TORRECILLAS LOZANO

*Mecánica de la fractura aplicada al hormigón*

FERNANDO MEDINA ENCINA Y HÉCTOR CIFUENTES BULTÉ

*Problemas de radiocomunicación*

JUAN JOSÉ MURILLO FUENTES

*Problemas resueltos de probabilidad y estadística en la ingeniería*

JOSÉ MANUEL FRAMIÑÁN TORRES, PAZ PÉREZ GONZÁLEZ  
GABRIEL VILLA CARO Y VÍCTOR FERNÁNDEZ-VIAGAS ESCUDERO

Catálogo completo de nuestras publicaciones  
en la página web

<<http://www.publius.us.es>>



UNIVERSIDAD DE SEVILLA  
Secretariado de Publicaciones

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Los autores del libro pertenecen al Departamento de Organización Industrial y Gestión de Empresas I de la Escuela Técnica Superior de Ingeniería de la Universidad de Sevilla, con docencia en los últimos años en las asignaturas de Estadística e Investigación Operativa, impartidas en distintos grados de Ingeniería.





**PROBLEMAS RESUELTOS  
DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA  
EN LA INGENIERÍA**



José Manuel Framiñán Torres  
Paz Pérez González  
Gabriel Villa Caro  
Víctor Fernández-Viagas Escudero

# PROBLEMAS RESUELTOS DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA EN LA INGENIERÍA



SECRETARIADO DE PUBLICACIONES  
UNIVERSIDAD DE SEVILLA



Escuela Técnica Superior de Ingeniería

SEVILLA 2014

Serie: Ingeniería

Colección: Monografías de la Escuela Técnica Superior de Ingeniería  
de la Universidad de Sevilla

Número: 3

COMITÉ EDITORIAL:

Antonio Caballos Rufino  
(Director del Secretariado de Publicaciones)  
Eduardo Ferrer Albelda  
(Sudirector)

Carmen Barroso Castro  
Jaime Domínguez Abascal  
José Luis Escacena Carrasco  
Enrique Figueroa Clemente  
M<sup>a</sup> Pilar Malet Maenner  
Inés M<sup>a</sup> Martín Lacave  
Antonio Merchán Álvarez  
Carmen de Mora Valcárcel  
M<sup>a</sup> del Carmen Osuna Fernández  
Juan José Sendra Salas

Reservados todos los derechos. Ni la totalidad ni parte de este libro puede reproducirse o transmitirse por ningún procedimiento electrónico o mecánico, incluyendo fotocopia, grabación magnética o cualquier almacenamiento de información y sistema de recuperación, sin permiso escrito del Secretariado de Publicaciones de la Universidad de Sevilla.

Motivo de cubierta: Representación de la Distribución Normal

© SECRETARIADO DE PUBLICACIONES  
DE LA UNIVERSIDAD DE SEVILLA 2014  
Porvenir, 27 - 41013 Sevilla.  
Tlfs.: 954 487 447; 954 487 451; Fax: 954 487 443  
Correo electrónico: [secpub4@us.es](mailto:secpub4@us.es)  
Web: <http://www.publius.us.es>

© JOSÉ MANUEL FRAMIÑÁN TORRES  
PAZ PÉREZ GONZÁLEZ  
GABRIEL VILLA CARO  
VÍCTOR FERNÁNDEZ-VIAGAS ESCUDERO 2014

Impreso en papel ecológico  
Impreso en España-Printed in Spain

ISBN: 978-84-472-1541-6  
Depósito Legal: SE 360-2014

Diseño de cubierta: Santi García | [santi@elmaquetador.es](mailto:santi@elmaquetador.es)  
Maquetación: Paz Pérez González y Javier Payán Somet  
Impresión: Imprenta Kadmos

# Introducción

---

Este libro está concebido como material de consulta para asignaturas con contenidos de Estadística en el ámbito de la Ingeniería, donde dichos contenidos juegan un papel fundamental en la modelización y resolución de problemas, y en el análisis de datos. Como es bien sabido, no es lo mismo entender cómo se resuelve un problema que ser capaces de resolverlo: mientras que lo primero puede llevarse a cabo en Estadística con unos conocimientos relativamente modestos de cálculo infinitesimal, lo segundo requiere una profunda comprensión de los contenidos teóricos, capacidad de análisis e intuición. Estas habilidades se ejercitan mediante la resolución de problemas, de ahí el objetivo principal del libro.

Así, el libro contiene una colección de problemas que se han ido proponiendo como ejercicios de clase o como problemas de examen en las asignaturas de Estadística e Investigación Operativa que se imparten en algunos grados de la Escuela Técnica Superior de Ingeniería de la Universidad de Sevilla, fundamentalmente en el Grado de Ingeniería en Tecnologías Industriales y en el Grado en Ingeniería Aeroespacial. Dichos problemas se han estructurado en capítulos, siguiendo un orden clásico de estudio de la Estadística que comienza por la Teoría de la Probabilidad y continúa por la Inferencia Estadística. Para facilitar su estudio y la notación empleada en los problemas, al principio de cada capítulo se incluye una breve sinopsis de los contenidos teóricos que se requieren para la resolución de dichos problemas. Estos contenidos no son autosuficientes y están pensados como una guía para clases teóricas sobre la materia. En ausencia de dichas clases teóricas, sería necesario acudir a alguno de los muchos libros excelentes sobre Estadística en Ingeniería.

A pesar de la estructuración por capítulos, los problemas son incrementales y, por lo general, no es factible abordar un problema de un capítulo sin tener al menos los conocimientos teóricos de los capítulos anteriores. Pensamos que este enfoque incremental es importante porque ayuda a sedimentar conocimientos y a obtener una visión general de la Estadística como herramienta para abordar fenómenos de naturaleza aleatoria.

Como ya se ha comentado anteriormente, las colecciones de problemas permiten entrenar las habilidades de modelado y de análisis, pero pueden tener efectos indeseados si se intenta evitar el entrenamiento por un mero estudio de su contenido. En este sentido, la Estadística resulta particularmente engañosa, ya que el modelado de los problemas depende a menudo

de hipótesis sutiles que es difícil captar simplemente mediante el estudio de cómo otras personas los han resuelto. Por eso, para aprovechar plenamente el libro, se recomienda primero abordar los problemas de forma autónoma y, en todo caso, emplear la solución para rectificar y/o verificar el enfoque que se ha dado. A estos efectos, los problemas están resueltos de varias formas posibles –aunque seguramente hay formas adicionales de abordarlos– con gran nivel de detalle, y además están clasificados en tres grupos según su dificultad. Los problemas que se indican con un asterisco (\*) son fáciles, los de dos asteriscos (\*\*) poseen una dificultad media, mientras que los de tres asteriscos (\*\*\*) son problemas difíciles.

# Índice

---

<b>1</b>	<b>Introducción a la Teoría de la Probabilidad</b>	<b>1</b>
1.1	Conceptos Básicos	1
1.1.1	Experimento aleatorio, espacio muestral y suceso	1
1.1.2	Operaciones con sucesos	1
1.1.3	Relaciones entre sucesos	4
1.2	Probabilidad	5
1.2.1	Definición y propiedades de la probabilidad	5
1.2.2	Probabilidad condicionada, probabilidad total y fórmula de Bayes	5
1.2.3	Independencia	6
1.3	Conteo	6
1.3.1	Permutaciones	6
1.3.2	Variaciones	7
1.3.3	Combinaciones	7
1.4	Problemas	8
<b>2</b>	<b>Variables aleatorias</b>	<b>27</b>
2.1	Variables aleatorias reales	27
2.2	Función de distribución	28
2.3	Clasificación de las variables aleatorias	29
2.3.1	Variable Aleatoria Discreta	29
2.3.2	Variable Aleatoria Continua	29
2.4	Características de la variable aleatoria	30
2.4.1	Esperanza matemática	30
2.4.2	Varianza matemática	31
2.4.3	Momentos y función generatriz de momentos	31
2.5	Variable aleatoria $n$ -dimensional	32
2.5.1	Funciones de distribución conjunta y marginales	32
2.5.2	Clasificación de variables aleatorias $n$ -dimensionales	33
	Variable aleatoria bidimensional discreta	33

Variable aleatoria bidimensional continua	33
2.5.3 Características de las variables aleatorias $n$ -dimensionales	34
2.5.4 Distribuciones condicionadas	35
2.5.5 Independencia de variables aleatorias	36
2.6 Problemas	37
<b>3 Distribuciones discretas</b>	<b>79</b>
3.1 Uniforme discreta en $n$ puntos	79
3.2 Concentrada en dos puntos/Bernoulli	79
3.3 Binomial	80
3.4 Hipergeométrica	82
3.5 Geométrica	82
3.6 Binomial Negativa	83
3.7 Poisson	84
3.8 Problemas	86
<b>4 Distribuciones continuas</b>	<b>111</b>
4.1 Uniforme	111
4.2 Exponencial	112
4.3 Gamma	113
4.4 Normal	115
4.4.1 Tipificación	116
4.4.2 Teorema Central del Límite	118
4.5 Problemas	119
<b>5 Muestras. Estimación puntual</b>	<b>175</b>
5.1 Muestra Aleatoria Simple	175
5.1.1 Estadísticos	176
5.2 Estimación puntual	176
5.2.1 Estimadores	176
5.2.2 Características de los estimadores	177
5.2.3 Estimador de máxima verosimilitud	178
5.2.4 Estimación de la esperanza y la varianza	178
5.3 Problemas	179
<b>6 Estimación Confidencial</b>	<b>199</b>
6.1 Concepto de intervalo de confianza	199
6.1.1 Introducción al concepto de contraste de hipótesis	199
6.2 Intervalo de confianza para cualquier variable aleatoria	201
6.2.1 IC para la media con varianza conocida	201
6.3 Suposición de normalidad. Distribuciones asociadas a la normal	201
6.3.1 Distribuciones basadas en la distribución normal	202
6.3.2 Teorema de Fisher	204
6.4 Intervalos de confianza para una variable aleatoria normal	204
6.4.1 IC para la varianza	205

---

6.4.2	IC para la media con varianza desconocida	205
6.5	Intervalos de confianza para dos variables aleatorias normales	205
6.5.1	IC para la diferencia de medias	205
6.5.2	IC para el cociente de varianzas	206
6.6	Problemas	207
<b>Apéndice A Resumen Distribuciones</b>		<b>265</b>
<b>Apéndice B Resumen Intervalos de Confianza</b>		<b>267</b>
<b>Apéndice C Tablas</b>		<b>269</b>